

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ составлено в соответствии с теоретическим курсом «Механика материалов» и является его неотъемлемым дополнением. Изучение данного курса включает обязательное выполнение лабораторных работ по экспериментальному определению механических характеристик материалов, определению напряжений и перемещений, возникающих в элементах инженерных конструкций и деталях машин, а также для подтверждения общих теоретических положений и методов. Выполнение лабораторных работ позволяет глубже раскрывать сущность изучаемых явлений, давать прочные фактические знания, развивать у студентов способность анализировать и обосновывать полученные результаты, соответствующими теоретическими положениями и предусматривает знакомство с принципами действия, устройством и тарировкой измерительных приборов и испытательных машин, с методикой проведения экспериментов и обработкой результатов опытов.

Эффективное выполнение лабораторной работы требует **предварительной подготовки студента** к ее проведению, которая состоит в основательном изучении по лекциям и учебникам теоретического материала, методических указаний к предстоящей работе. Перед проведением лабораторной работы преподаватель проверяет у студентов качество их подготовки путем устного или письменного опроса по сущности цели работы, порядку проведения, теоретическому обоснованию предстоящих экспериментов, контрольным вопросам.

Экспериментальная часть в каждой работе проводится с применением обучающего программного комплекса виртуальных лабораторных работ (ВЛР) COLUMBUS-2007 [1]. Этот программный комплекс дает возможность визуально наблюдать на мониторе компьютера процесс испытания материалов при различных видах нагружения и получать необходимые данные для теоретиче-

ских расчетов, построения графиков, диаграмм и выводить результаты испытаний на печать.

Например, цель проведения ВЛР на тему «Испытание материалов на растяжение» – получение диаграммы растяжения стального образца, для изучения его механических свойств и характеристик прочности, пластичности и вязкости материала по диаграмме растяжения. При ее выполнении имитируются испытания стандартного стального образца на испытательной машине типа ИР 5047-50, осуществляя пошаговое или непрерывное нагружение образца, а также разгрузка его в произвольный момент времени с одновременным построением диаграммы «удлинение – сила».

Испытание наглядно демонстрируется на мониторе. Модель машины и образца позволяют визуально наблюдать удлинение образца, изменение напряжений в его поперечном сечении и образование зоны местного сужения при превышении усилия соответствующего пределу прочности материала в зависимости от его механических характеристик. По окончании эксперимента программа позволяет графически выделить зоны деформации. Имеется возможность индикации координат произвольных точек диаграммы.

Общий порядок работы на ПК. Открывается папка COLUMBUS-2007. На экране появляется 11 исполняемых модулей. Для запуска ВЛР нужно щелчком мыши вызвать соответствующий файл. При выполнении каждой ВЛР верхняя строка экрана содержит Главное меню с раскрывающимися списками: Эксперимент, Управление стендом, Настройки, Студент, Вид, Помощь.

Вторая и последняя строка экрана содержат соответственно панель инструментов и строку состояния, изображением которых можно управлять с помощью подменю «ВИД». При щелчке мышью по кнопкам Главного меню открываются следующие подменю.

1. «ЭКСПЕРИМЕНТ»: новый эксперимент, записать файл результатов, печать результатов и выход.
2. «УПРАВЛЕНИЕ СТЕНДОМ»: загрузить, разгрузить и выбрать материал.
3. «СТУДЕНТ»: фамилия, имя, отчество, учебное заведение, группа.
4. «ВИД»: показать панель инструментов и показать строку состояния.
5. «ПОМОЩЬ»: информация о структуре и содержании ВЛР.

Все операции по выполнению ВЛР выведены на панель инструментов. В частности, клавиша «Настройки» открывает окно для установки необходимых параметров эксперимента.

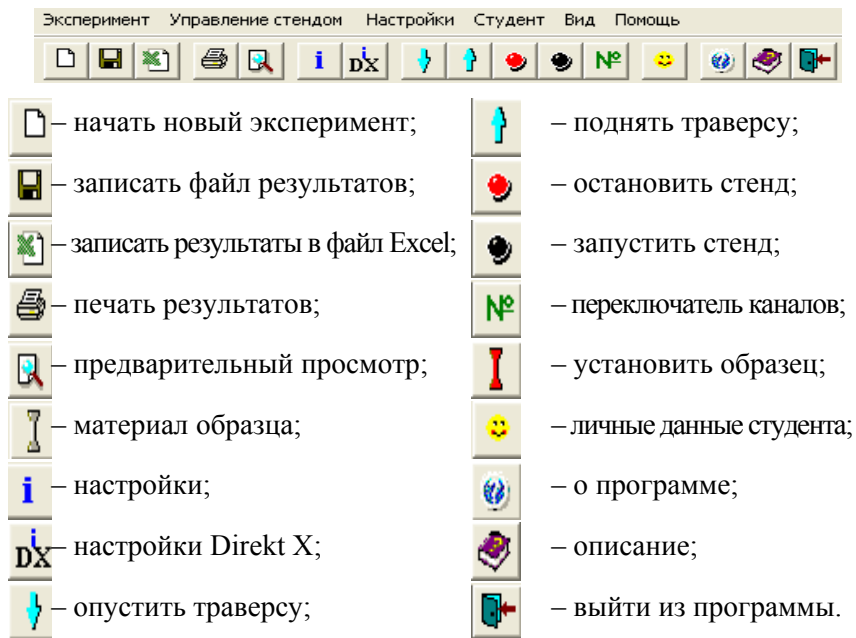


Рисунок. Главное меню и панель инструментов

По каждой лабораторной работе студенты составляют индивидуальные отчеты по принятой форме, включающей следующие разделы:

1. Название и цель работы.
2. Краткое теоретическое обоснование и расчетные формулы с ответами на контрольные вопросы [2], поставленные по теме лабораторной работы.
3. Принципиальная схема установки, таблицы для опытных и расчетных величин.
4. Результаты экспериментов и обработка опытных данных.
5. Сопоставление значений опытных величин с теоретическими и справочными данными.
6. Анализ и объяснение возможных отклонений.
7. Выводы.

Лабораторная работа №1

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА РАСТЯЖЕНИЕ

Цель работы: определить основные характеристики прочности (пределы пропорциональности, текучести, прочности и разрушения образца), пластичности (относительное остаточное удлинение и сужение), вязкости (удельную работу деформации) материала образца при растяжении; получить диаграммы растяжения стальных образцов.

Теоретическое обоснование

Прочностью называется способность материала сопротивляться разрушению, а также необратимому изменению формы и размеров при воздействии внешних нагрузок. **Пластичность** – свойство материала изменять форму и размеры без разрушения и образования трещин при воздействии механических нагрузок и сохранять измененную форму и размеры после снятия нагрузок. Свойство, противоположное пластичности, называется хрупкостью. **Хрупкость** – свойство материала разрушаться после незначительных пластических деформаций и заметного изменения формы и размеров. Проектируемые элементы инженерных конструкций и детали машин должны удовлетворять условию прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad (1)$$

где σ_{\max} – наибольшее рабочее напряжение в элементе конструкции (детали);

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение;

σ_0 – опасное напряжение, при котором происходит разрушение или возникают значительные деформации, т. е. невозможна эксплуатация деталей машин;

n – коэффициент запаса прочности, который определяется техническими условиями и нормами проектирования.

Механические характеристики материала определяются опытным путем по результатам испытания стандартных образцов на растяжение. Основной задачей испытания является построение диаграммы растяжения – графика зависимости между силой F , действующей на образец, и удлинением Δl . Типичная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали показана на рис. 1, которая условно делится на четыре зоны.

Участок **0–I** называется **зоной упругости**. Изображается на диаграмме прямой наклонной линией, что указывает на пропорциональность между нагрузкой и деформацией в соответствии с законом Гука.

Участок **I–II** называется **зоной общей текучести**, а горизонтальная часть участка – площадкой текучести. На этом этапе практически при неизменном усилии значительно развиваются пластические деформации во всем объеме материала. При этом повышается температура образца, изменяются электропроводность и магнитные свойства.

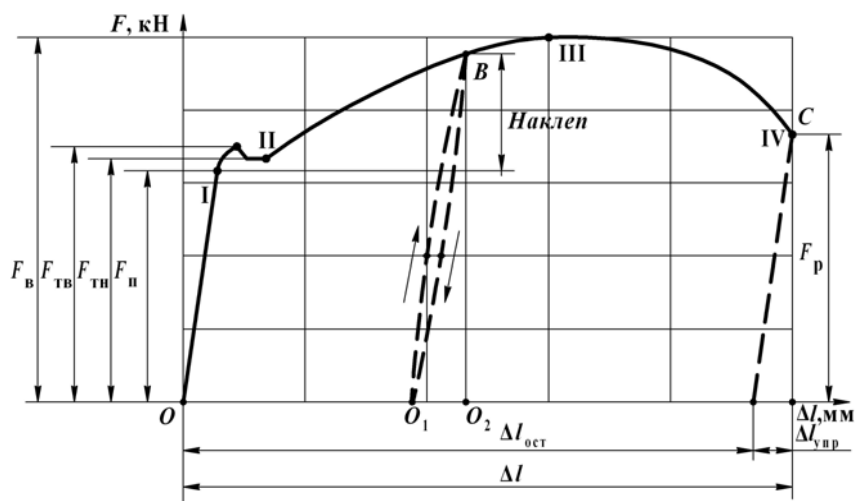


Рис. 1. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Особенно наглядно распространение пластической деформации можно наблюдать при испытании плоских полированных образцов. На поверхности в момент возникновения очагов пластической деформации появляются темные наклонные полосы, составляющие

с осью образца углы, приблизительно равные 45° . Это линии Людерса-Чернова, которые представляют собой микроскопические неровности, возникающие вследствие необратимых сдвигов, происходящих в кристаллах материала под действием наибольших касательных напряжений.

При испытании материалов на высококачественных машинах зона текучести характеризуется зубчатостью, что объясняется различием внешней формы, размеров и ориентации зерен металла, неоднородностью деформаций. Описанные явления вызывают изменение внутренней структуры металла, что приводит к его упрочнению. Диаграмма после зоны текучести снова становится криволинейной.

Участок **II–III** называется **зоной упрочнения**. Удлинение образца происходит равномерно по всей его длине, первоначальная цилиндрическая форма образца сохраняется, размеры поперечных сечений изменяются незначительно.

Участок **III–IV** называется **зоной местной текучести**. При максимальном усилии в самом слабом месте возникает локальное уменьшение поперечного сечения – «шейка». Дальнейшая деформация происходит в этом месте. Сечение в середине «шейки» быстро уменьшается, напряжение возрастает при убывающем растягивающем усилии, и образец разрушается.

Опыт показывает, что если в какой-либо точке B зоны упрочнения образец разгрузить, то процесс разгрузки будет изображен линией BO_1 , почти параллельной первоначальному упругому участку диаграммы. Удлинение образца при разгрузке полностью не исчезает, а становится меньше на удлинение упругой части – отрезок O_1O_2 . Остаточное удлинение – отрезок OO_1 – пластическая деформация.

Если после разгрузки образца его тут же снова нагрузить, то процесс повторного нагружения изобразится линией O_1B , которая почти совпадает с линией BO_1 . Обе линии образуют **петлю гистерезиса**. После полного цикла образец возвращается к первоначальному состоянию. Это явление носит название упругого гистерезиса. Площадь петли гистерезиса соответствует потерям механической энергии за один цикл. При дальнейшем нагружении после точки B кривая продолжается так, как будто не было промежуточной разгрузки. Следовательно, у образца после предварительного деформирования улучшились упругие свойства – повысился предел пропорциональности, но ухудшились пластические свойства –

уменьшилось остаточное удлинение после разрыва, т. е. материал стал более хрупким. Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется **наклепом**.

Наклеп широко используется в технике, но наблюдается не у всех материалов и даже не у всех металлов (например, свинец или олово). Цепи и канаты подъемных машин подвергают предварительной вытяжке, чтобы устранить остаточные удлинения, которые могут возникнуть во время работы. Аналогичной обработке подвергают некоторые виды арматуры железобетонных конструкций, цилиндры гидравлических прессов, турбинные диски. В некоторых случаях явление наклепа является нежелательным, например, в таких технологических процессах как, прокатка стержней, резание листового материала, штамповка тонкостенных деталей, пробивание отверстий в листах под заклепки. Для устранения вредного влияния наклепа материал отжигают или, если это возможно, удаляют ту его часть, которая получила наклеп.

Полное удлинение образца Δl в точке разрыва C также складывается из упругого $\Delta l_{упр}$ и остаточного $\Delta l_{ост}$ удлинений: $\Delta l = \Delta l_{упр} + \Delta l_{ост}$.

При разрушении полное удлинение образца уменьшается на величину упругой части $\Delta l_{упр}$ и будет представлять только остаточное удлинение $\Delta l_{ост}$.

По результатам проведения испытаний вычерчивается диаграмма растяжения в системе координат F в кН и Δl в м. Для того, чтобы сравнивать результаты испытаний образцов различных размеров, и для получения числовых значений прочностных характеристик материала образца, диаграмму растяжения перестраивают в системе координат $\sigma - \epsilon$ – напряжения и относительного удлинения. Для этого ординаты уменьшают в A_0 раз, а абсциссы в l_0 раз, где A_0 и l_0 – площадь поперечного сечения и расчетная длина образца до нагружения. Учитывая, что A_0 и l_0 – величины постоянные, диаграмма $\sigma = f(\epsilon)$ имеет **тот же вид**, что и диаграмма растяжения, но характеризует уже не свойства образца, а свойства его материала.

По результатам испытаний на одноосное растяжение материалы принято делить на **пластичные** и **хрупкие**. К пластичным относятся материалы, разрушению которых предшествуют большие остаточные деформации, достигающие иногда 20–25 %. Их характерными представителями являются малоуглеродистая сталь и алюминий. Хрупкими называют материалы, разрушающиеся при малых остаточных деформациях, не превышающих 2–5 %. Характерными

представителями хрупких материалов являются чугун, инструментальная сталь и стекло.

Пластичные материалы проявляют большее сопротивление отрыву частиц, чем сдвигу их друг относительно друга, и разрушаются, главным образом, от сдвига частиц в плоскостях действия наибольших касательных напряжений. Именно вследствие сдвига частиц увеличивается длина образца из пластичного материала при его растяжении, а место разрушения в «шейке» имеет вид кратера, стенки которого наклонены к оси образца под углом 45° (рис. 2, *а*). Дном этого кратера является поверхность первоначальной внутренней трещины, возникающей после образования «шейки».

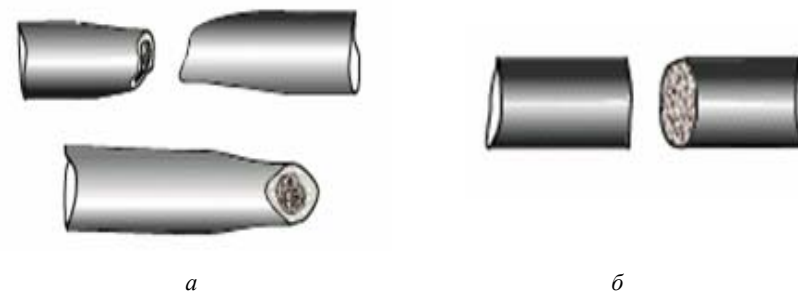


Рис. 2. Место разрушения образца:
а – в виде кратера, *б* – по плоскости поперечного сечения

Хрупкие материалы, наоборот, обладают большим сопротивлением сдвигу, чем отрыву, и при растяжении внезапно разрушаются от отрыва частиц материала по плоскости поперечного сечения (рис. 2, *б*). Перед разрывом явления текучести, упрочнения и образования «шейки» на образцах из таких материалов не наблюдаются. Диаграмма растяжения для хрупких материалов представлена на рис. 3.

Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным, так как свойства материалов зависят от температуры, скорости и вида нагружения. Один и тот же материал в одних условиях ведет себя как хрупкий, в других – как пластичный. Например, мрамор при одноосном растяжении разрушается как хрупкий материал, а при всестороннем сжатии проявляет пластические свойства. Поэтому правильнее говорить о пластичном и хрупком характере разрушения материала. Первое происходит при больших, а второе при малых остаточных деформациях.

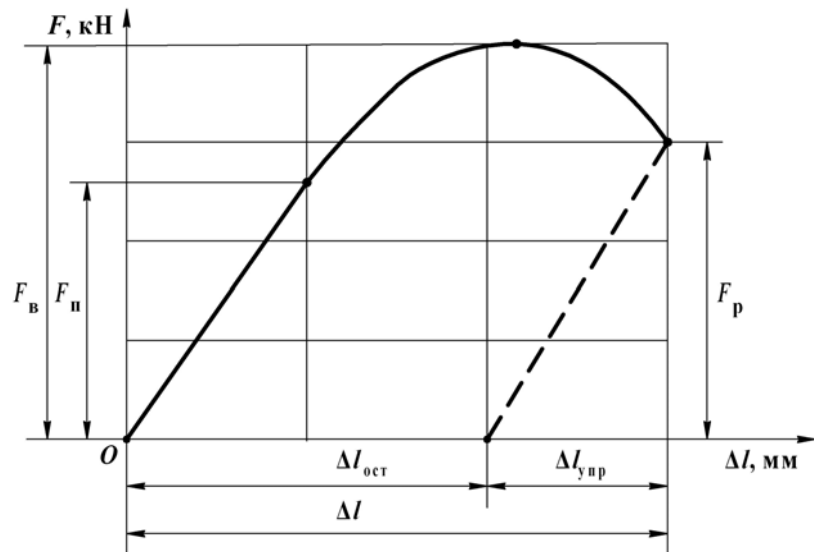


Рис. 3. Диаграмма растяжения хрупких материалов

По результатам испытаний рассчитываются числовые значения **прочностных** характеристик материала в соответствии с ГОСТ 1497–84. К ним относятся:

1. **Предел пропорциональности** $\sigma_{п}$ – наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука:

$$\sigma_{п} = \frac{F_{п}}{A_0} . \quad (2)$$

Напряжение полного перехода материала к пластической деформации определяется **пределом текучести**. Если зона текучести характеризуется скачкообразным изменением нагрузки, то вводится понятие верхнего и нижнего пределов текучести:

2. **Верхний предел** текучести:

$$\sigma_{тв} = \frac{F_{тв}}{A_0} . \quad (3)$$

3. **Нижний предел** текучести:

$$\sigma_{тн} = \frac{F_{тн}}{A_0} . \quad (4)$$

На величину верхнего предела текучести существенно влияют многие факторы, в том числе условия проведения испытаний, поэтому нижний предел текучести принимается за физический предел текучести. Предел текучести является одной из основных механических характеристик материала.

4. **Предел прочности** $\sigma_{в}$ – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой образцом:

$$\sigma_{в} = \frac{F_{в}}{A_0} . \quad (5)$$

5. **Предел разрушения** $\sigma_{р}$:

$$\sigma_{р} = \frac{F_{р}}{A_0} ; \quad (6)$$

где $F_{п}, F_{тв}, F_{тн}, F_{в}, F_{р}$ – соответствующие усилия нагружения образца.

Мерой пластичности являются две характеристики материала, определяемые при испытании на растяжение.

1. **Относительное остаточное удлинение** δ при разрыве:

$$\delta = \frac{\Delta l_{ост}}{l_0} \cdot 100 \% , \quad (7)$$

где l_0 – расчетная длина образца до нагружения;

l – длина образца после разрыва.

2. **Относительное сужение** ψ площади поперечного сечения «шейки» $A_{ш}$:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \cdot 100 \% . \quad (8)$$

Чем больше δ и ψ , тем более пластичным считается материал.

Статическая вязкость – величина удельной работы деформации α является важной характеристикой материала. Это комплексный показатель, определяемый совокупностью прочностных и пластических

свойств материала. Он является характеристикой изменения структурного состояния материала, способности материала поглощать энергию при разрыве, сопротивляться действию динамических нагрузок, развитию трещин.

Работа, затраченная на деформацию и разрушение расчетной длины образца $W_{\text{расч}}$, определяется по формуле:

$$W_{\text{расч}} = F_{\text{в}} \cdot \Delta l_{\text{ост}} \cdot \eta, \quad (9)$$

где $F_{\text{в}}$ – величина наибольшей нагрузки;

$\Delta l_{\text{ост}} = l - l_0$ – остаточное удлинение;

S – коэффициент полноты диаграммы, для малоуглеродистой стали принимается равным 0,85.

Удельная работа, затраченная на разрушение единицы объема образца:

$$\alpha = \frac{W_{\text{расч}}}{V_0} = \frac{F_{\text{в}} \cdot \Delta l_{\text{ост}} \cdot S}{A_0 \cdot l_0}, \quad (10)$$

где $V_0 = A_0 \cdot l_0$ – начальный объем расчетной длины образца.

Из анализа диаграмм растяжения определяются опасные напряжения σ_0 . Для пластичных материалов эксплуатация детали невозможна при возникновении значительных пластических деформаций и $\sigma_0 = \sigma_{\text{т}}$, для хрупких характерно разрушение без возникновения таких деформаций и $\sigma_0 = \sigma_{\text{в}}$.

Порядок выполнения работы

Установка – виртуальная разрывная машина типа ИР 5047-50 (рис. 4). Команды управления, выведены на панель инструментов (табл. 1). Предварительно выбирается материал образца, его размеры: диаметр d_0 и длина l_0 и устанавливаются требуемые параметры эксперимента (рис. 7).

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов (эксперимент 1)

Панель инструментов	Команды
Новый эксперимент	1. Начало эксперимента
Материал образца (серый образец)	2. Выбрать материал образца (рис. 5): сталь «Конструкционная углеродистая качественная», «Арматурная А1» или «Сталь 20» (рис. 6)

Панель инструментов	Команды
Настройки	3. Установить параметры эксперимента (рис. 7): – диаметр образца d_0 , м; – рабочую длину образца l_0 , м; – скорость деформирования, м/мин: «Арматурная А1» – 0,001; «Сталь 20» – 0,01; – количество точек графика в наиболее узкой зоне деформации – 5; – количество точек графика для сохранения в файле результатов – 25
Красный образец	4. Установить образец для испытаний
Запустить стенд	5. Включить гидронасос – выполнение эксперимента
Остановить стенд	6. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

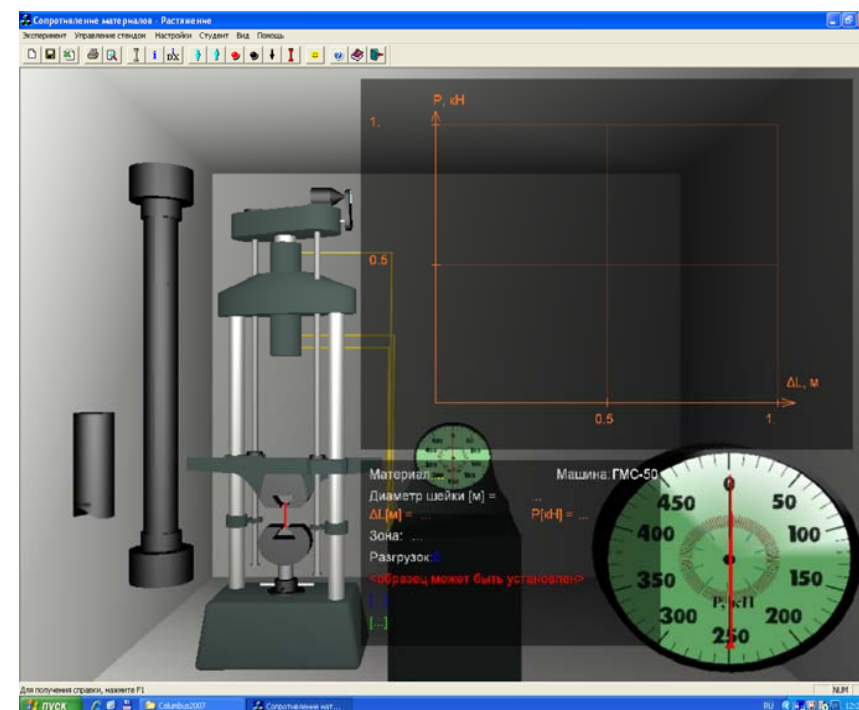


Рис. 4. Общий вид виртуальной лабораторной установки

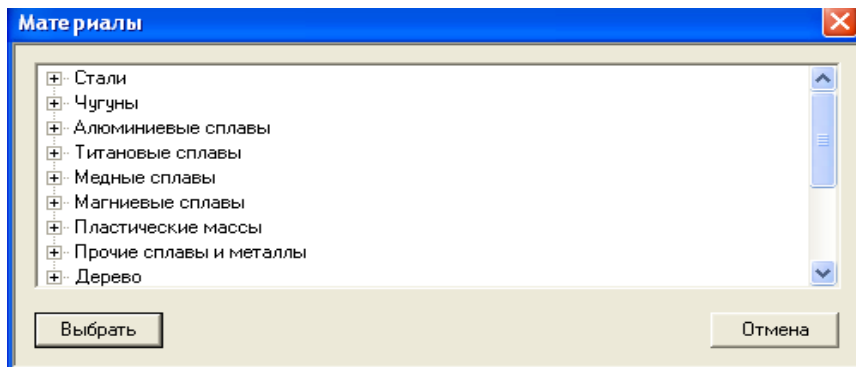


Рис. 5. Структура базы данных материалов образца

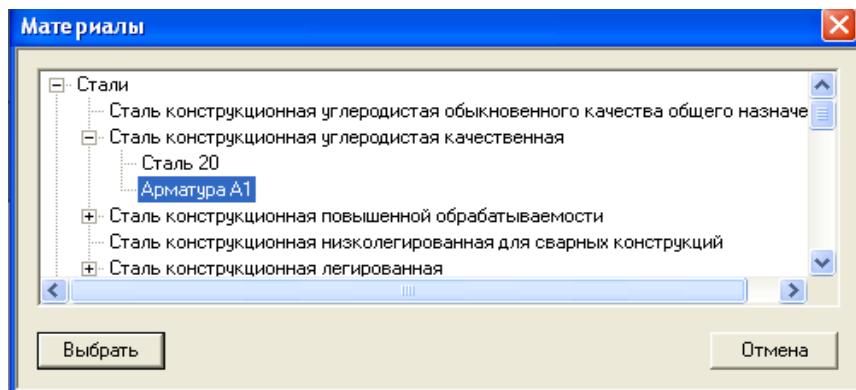


Рис. 6. Последовательность выбора материала образца

Виртуальная модель машины и образца позволяют визуально наблюдать удлинение образца, изменение напряжений в его поперечном сечении и образование зоны местного сужения при превышении усилия, соответствующего пределу прочности материала. Под изображением диаграммы указываются: материал образца, значение диаметра «шейки» в месте разрыва после завершения опыта, текущие значения удлинения и нагрузки. Численное значение нагрузки можно также наблюдать на индикаторе часового типа в правом нижнем углу. Далее показывается зона диаграммы, в которой в данный момент проходит опыт, количество разгрузок и состояние машины (рис. 8).

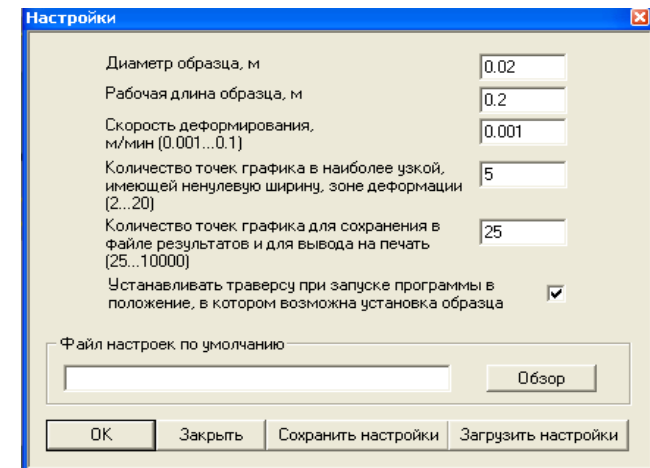


Рис. 7. Настройки параметров эксперимента

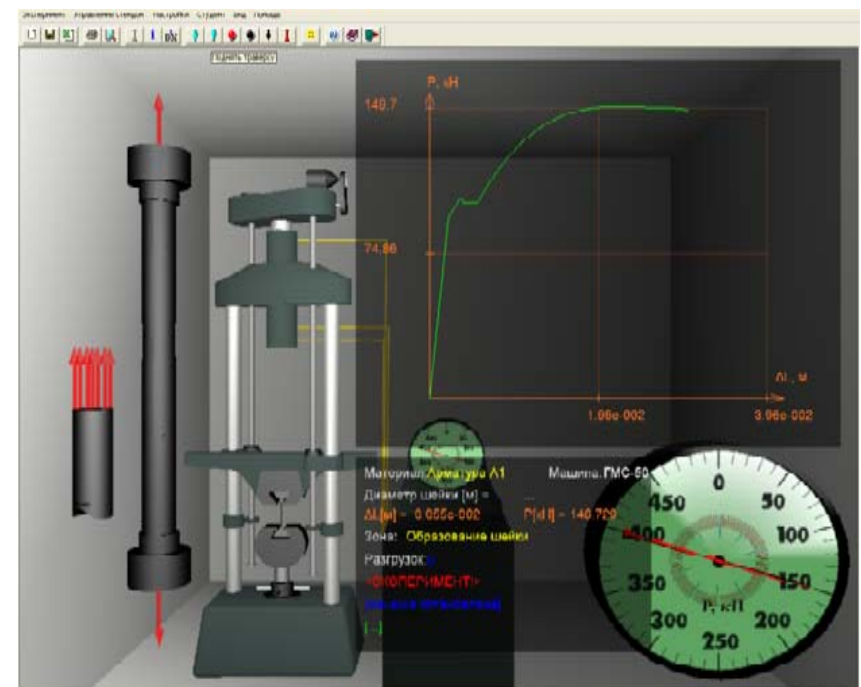


Рис. 8. Диаграмма растяжения образца из стали «Арматурная А1»

При выборе образца из материала «Сталь 20» диаграмма растяжения будет иметь вид, показанный на рис. 9, без явно выраженной зоны общей текучести. Этот вид диаграммы более соответствует виду диаграмм растяжения для хрупких материалов, что свидетельствует об изменении характера разрушения образца. Такое разрушение называется квазихрупким (quazi (лат.) – как бы, якобы, наподобие) и является промежуточным между хрупким и пластичным разрушениями.

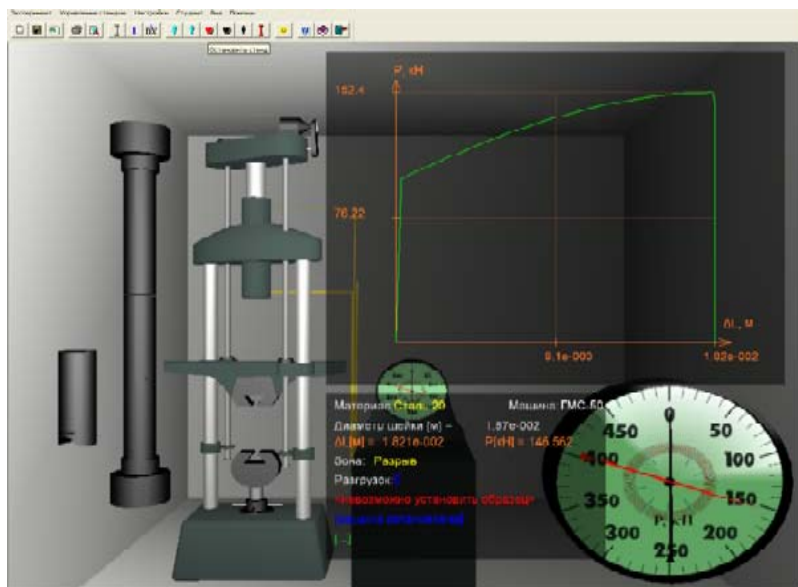


Рис. 9. Диаграмма растяжения образца из материала «Сталь 20»

После завершения 1-го эксперимента выполнить 2-й с демонстрацией явления наклепа, выполнив 5 команд на панели инструментов: начать новый эксперимент, выбрать материал образца, установить параметры эксперимента, установить образец в захваты разрывной машины и запустить стенд (табл. 1). Далее, выполнить дополнительные команды 6–10 на панели инструментов (табл. 2). Следует иметь в виду, что гистерезисная петля на экране не показывается (рис. 10).

По окончании эксперимента подведением мыши к произвольной точке диаграммы графически производится индикация координат этой точки диаграммы на панели текущей информации и выделение зоны диаграммы более темным оттенком – упругая деформация,

непропорциональная деформация, текучесть, упрочнение, образование «шейки». При этом показания на ней означают:

$\Delta L[\text{M}] = 3.055\text{e-}002$ – удлинение образца $\Delta l = 3,055 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 30,55 \text{ мм}$;
 $P[\text{kH}] = 148.729$ – соответствующая нагрузка $F = 148,729 \text{ кН} = 148729 \text{ Н}$.

Таблица 2

Дополнительные команды на панели инструментов (эксперимент 2)

Панель инструментов	Команды
Остановить стенд	6. Остановить нагружение в зоне упрочнения II–III
Опустить траверсу	7. Разгрузить образец, демонстрируя процесс наклепа
Поднять траверсу	8. Вернуть нагрузку образца к месту остановки стенда
Запустить стенд	9. Включить гидронасос – продолжение эксперимента
Остановить стенд	10. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

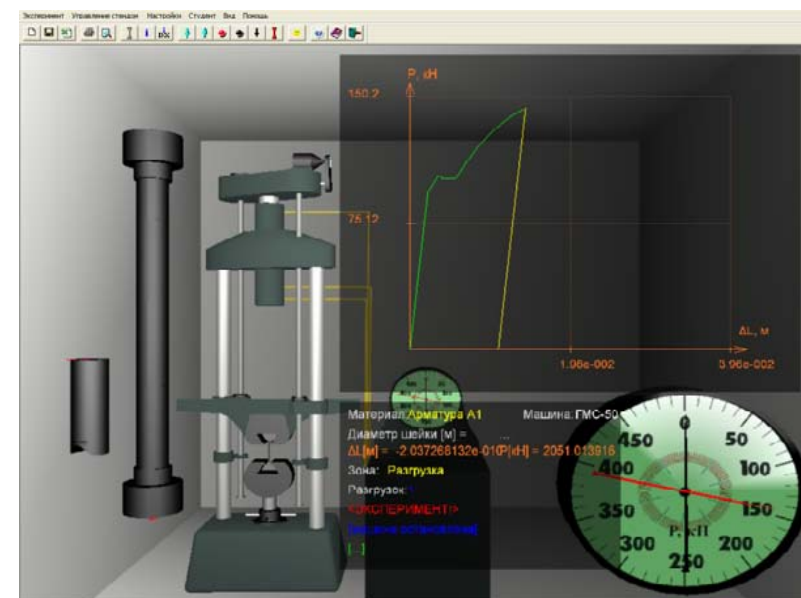


Рис. 10. Демонстрация процесса наклепа образца из стали «Арматурная А1»

Обработка результатов испытаний

Таблица 3

После проведения виртуального испытания заполняются таблицы опытных данных (табл. 3 и 4). Данные для заполнения графы «Размеры образца» до опыта берутся с панели настройки параметров эксперимента (рис. 7), после опыта – с панели текущей информации (рис. 12). По данным табл. 3 рассчитываются начальная площадь A_0 и площадь поперечного сечения образца в месте разрыва $A_{ш}$, а также его остаточное удлинение после опыта $\Delta l_{ост} \approx \Delta l_p - \Delta l_n$.

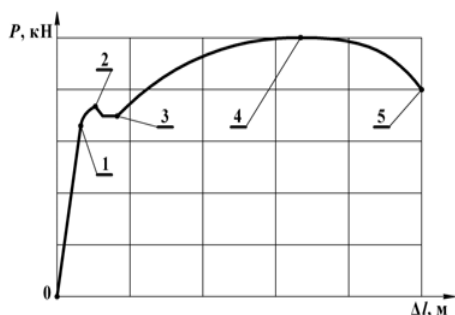


Рис. 11. Расчетные точки диаграммы: 1 – верхняя точка зоны упругости на диаграмме, 2 – верхний выступ в зоне общей текучести, 3 – нижнее значение предела зоны общей текучести, 4 – самая верхняя точка диаграммы перехода от зоны упрочнения к зоне местной текучести, 5 – точка разрушения образца.

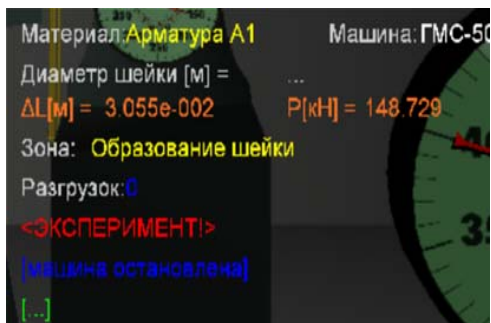


Рис. 12. Панель текущей информации

Для заполнения графы «Нагрузка» подводится курсор к пяти расчетным точкам диаграммы (рис. 11) и записываются текущие значения нагрузки F , Н и удлинения образца Δl , мм из панели текущей информации (рис. 12) в табл. 4.

Параметры образца до и после опыта

Размеры образца					
l_0 , мм	d_0 , мм	$d_{ш}$, мм	A_0 , мм ²	$A_{ш}$, мм ²	$\Delta l_{ост}$, мм

Таблица 4

Опытные данные

Нагрузка F , Н					Удлинение образца Δl , мм				
F_p	$F_{тв}$	$F_{тн}$	F_b	F_p	Δl_p	$\Delta l_{тв}$	$\Delta l_{тн}$	Δl_b	Δl_p

По результатам испытаний:

1. Определить экспериментально основные механические характеристики материала по расчетным формулам (2–10) и данные записать в табл. 5:

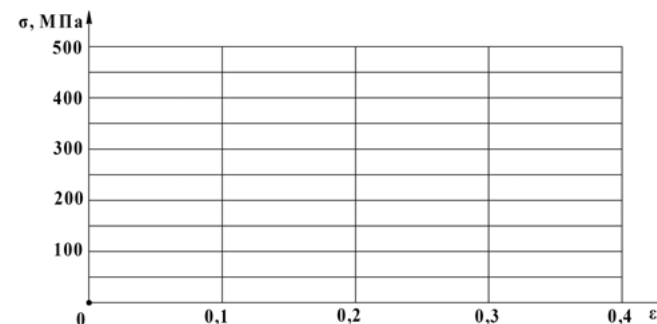
- прочность: пределы пропорциональности σ_p , текучести $\sigma_{тв}$ и $\sigma_{тн}$, прочности σ_b и разрушения образца σ_p ;
- пластичность: относительное остаточное удлинение δ и относительное сужение в «шейке» ψ ;
- вязкость: удельную работу на разрушение образца α .

Таблица 5

Механические характеристики материала образца

Прочность напряжения, МПа					Относительные удлинения ϵ					Пластичность, %	Вязкость, Н·мм/мм	
σ_p	$\sigma_{тв}$	$\sigma_{тн}$	σ_b	σ_p	ϵ_p	$\epsilon_{тв}$	$\epsilon_{тн}$	ϵ_b	ϵ_p	δ	ψ	α

2. Построить диаграмму растяжения в координатах $\sigma - \epsilon$ (табл. 5):



Контрольные вопросы

1. Что называется диаграммой растяжения, на какие зоны она разделяется?
2. Как формулируется закон Гука, в какой зоне диаграммы он соблюдается?
3. Напишите формулы абсолютной и относительной продольных деформаций бруса.
4. Как определить пределы: пропорциональности, текучести, прочности и разрушения образца?
5. Какие деформации называются упругими и какие пластичными (остаточными)?
6. Какие материалы называются хрупкими и какие пластичными?
7. В чем различие диаграмм растяжения пластичных и хрупких материалов?
8. Объясните явление наклепа. Как он используется в технике?
9. Какой параметр определяет работу материала после наклепа?
10. Какое свойство материала определяет удельная работа разрыва образца?

Темы для УИРС

1. Испытание образцов из чугуна и легированной стали на растяжение.
2. Испытание образцов из полимерных и неметаллических материалов.
3. Влияние скорости деформирования на характер разрушения материалов.

Лабораторная работа № 2

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ

Цель работы: определить основные характеристики прочности при сжатии; изучить поведение пластичных и хрупких материалов при сжатии.

Теоретическое обоснование

Испытания на сжатие проводятся реже, чем на растяжение, потому что при сжатии невозможно получить все показатели, характеризующие механические свойства материалов. Так пластичный материал при сжатии не разрушается, а превращается в диск (рис. 1, *a*), что не позволяет определить напряжение, соответствующее разрушающей силе, и параметры, аналогичные характеристикам пластичности.

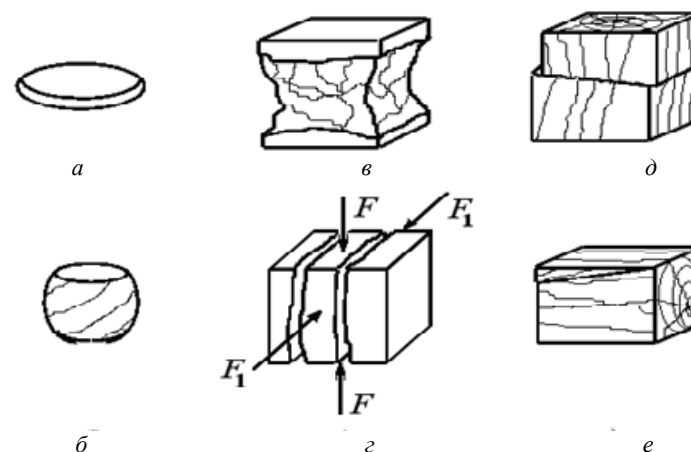


Рис. 1. Характер разрушения образцов из различных материалов при сжатии:
a – медь; *б* – чугун; *в* и *г* – бетон без смазки и со смазкой;
д и *е* – дерево вдоль и поперек волокон

Характер разрушения хрупких материалов при сжатии зависит от величины сил трения на торцах образца. Если они велики, то образец разрушается путем среза, если малы – путем отрыва (рис. 1, *в–е*). На рис. 1, *в* изображена примерная схема разрушения образца из бетона. Тонкими линиями обозначены трещины, последовательно возникающие в ходе испытания. Если опорные плиты испытательного пресса и торцы образца смазать невыдавливающей смазкой, то получится вид разрушения, показанный на рис. 1, *з*. Образец может разделиться на части несколькими трещинами, ориентированными примерно параллельно одной из ненагруженных граней. Возникновение такой схемы разрушения имеет повышенную вероятность в случае, если образец нагружить силами F_1 в боковом направлении, не превышающих 20 % от основной сжимающей силы F .

На рис. 2 в верхнем ряду показаны иллюстрации деформирования образцов из различных материалов при проведении испытаний на сжатие в данной ВЛР, в нижнем ряду – вид образцов после завершения испытаний.

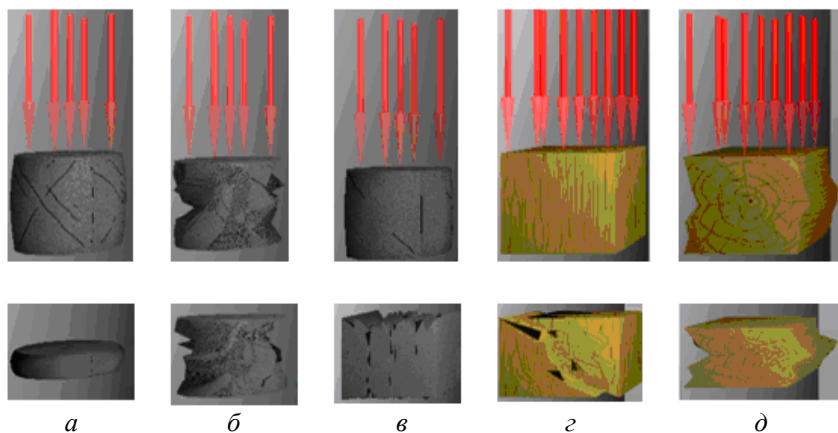


Рис. 2. Примеры деформирования и разрушения образцов:
а – «Сталь 20»; *б* – «Чугун серый СЧ»; *в* – бетон;
г и *д* – вдоль и поперек волокон ели

На практике испытаниям на сжатие подвергаются в основном хрупкие материалы и сплавы – чугун, бетон, цемент, природный камень, кирпич, керамика, дерево. Для пластичных материалов

испытание на сжатие является дополнением к испытаниям на растяжение. При испытаниях на сжатие применяются короткие образцы цилиндрической формы с диаметром d и высотой h для пластичных и образцы в виде кубиков для хрупких материалов (табл. 1).

Таблица 1

Типы образцов для испытаний на сжатие

Наименование материала	Форма образца	Размеры образца
Сталь	Цилиндр	$d = h = 20$ мм
Чугун	Цилиндр	$d = h = 20$ мм
Камень	Кубик	70×70×70 мм
Цемент	Кубик	70×70×70 мм
Бетон	Кубик	200×200×200 мм 300×300×300 мм
Кирпич	0,5 кирпича	120×120×70 мм

Для уменьшения влияния изгиба рекомендуется применять образцы, длина которых не более чем в 2 раза превышает их поперечные размеры. Длинные образцы под действием сжимающей нагрузки изгибаются и теряют устойчивость. Применение слишком коротких образцов тоже нежелательно, потому что при сжатии образца продольные размеры уменьшаются, а поперечные увеличиваются.

В процессе сжатия на торцах образца возникают силы трения, направленные радиально от периферии к центру, что препятствует радиальным деформациям торцевых областей образца наружу. Образец принимает бочкообразную форму, распределение напряжений в сечениях образца становится неравномерным (рис. 3, *а*).

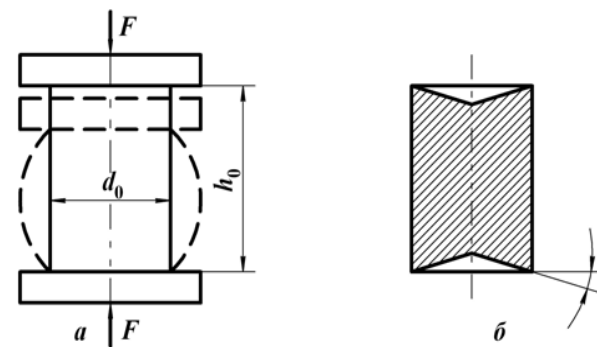


Рис. 3. Формы образцов:
а – изменение формы при сжатии, *б* – коническая поверхность на торцах

Для уменьшения влияния сил трения на результаты испытаний вводят различные смазки (солидол) или прокладки (тефлон) или используют образцы, имеющие на торцах коническую поверхность, выполненную так, чтобы тангенс угла наклона α равнялся коэффициенту трения (рис. 3, б). Полностью устранить силы трения и обеспечить в образце при испытании линейное напряженное состояние невозможно, что является принципиальным недостатком испытаний на сжатие.

Испытания на сжатие производятся в соответствии с ГОСТ 25.503–97. При испытании автоматически вычерчивается диаграмма сжатия – график зависимости между усилием F и деформацией Δh и определяются напряжения:

σ_n – предел пропорциональности, который определяет линейный участок зависимости нагрузки от деформации на диаграмме сжатия;

σ_y – предел упругости, при котором деформация образца превышает деформацию предела пропорциональности на 0,05;

σ_T – физический предел текучести – наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения сжимающей нагрузки;

σ_b – предел прочности – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца.

Вид диаграмм сжатия для хрупких и пластичных материалов различен (рис. 4). Для малоуглеродистой стали диаграмма сжатия представлена на рис. 5. По показателям диаграммы определяются прочностные характеристики материала при сжатии. Методика их определения аналогична методике при растяжении.

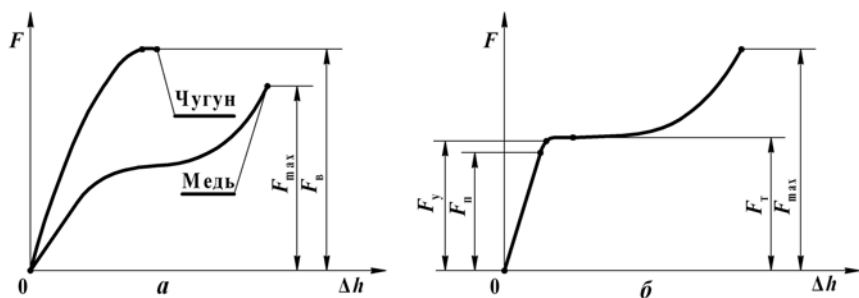


Рис. 4. Диаграммы сжатия:

а – хрупких и пластичных материалов; б – малоуглеродистой стали

На начальном участке диаграмма сжатия не отличается от диаграммы растяжения и пределы пропорциональности, упругости и текучести определяются по аналогичным формулам, а именно:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{A_0}, \quad \sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad \sigma_T = \frac{F_T}{A_0}; \quad (1)$$

где F_n , F_y и F_T – нагрузки, соответствующие на диаграмме пределам пропорциональности, упругости и пределу физической текучести;

A_0 – первоначальная площадь поперечного сечения образца.

На диаграмме явно выраженной площадки текучести не наблюдается, с дальнейшим ростом деформации имеет место процесс упрочнения материала. В отличие от диаграммы растяжения на диаграмме сжатия нет спадающей ветви диаграммы. Происходит это потому, что площадь поперечного сечения сжатого образца постоянно увеличивается (образец практически расплющивается, превращаясь в тонкий диск). Поэтому пластичные материалы при сжатии не имеют предела прочности. К высокопластичным материалам относятся технически чистые металлы: железо, алюминий, медь, никель, золото. Хорошей пластичностью обладают также многие сплавы металлов, в том числе стали, модули продольной упругости которых при растяжении и сжатии практически одинаковы, что позволяет считать их одинаково работающими на растяжение и сжатие.

Диаграмма сжатия чугунного образца представлена на рис. 4, а. При сжатии чугунного образца не наблюдается линейная зависимость между сжимающей силой и деформацией, но в инженерных расчетах принимается, что до нагрузки $0,5F$ материал подчиняется закону Гука. При укорочении образец приобретает бочкообразную форму. Разрушение образца происходит по плоскостям, наклоненным примерно под углом 45° к оси под действием максимальных касательных напряжений (рис. 1, б и 2, б). Отношение разрушающей нагрузки $F_b = F_{max}$ к начальной площади поперечного сечения образца A_0 определяет предел прочности хрупкого материала при сжатии:

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_0}. \quad (2)$$

Предел прочности на сжатие у хрупких материалов (чугун, бетон, керамика) выше, чем при растяжении и модуль продольной

упругости при сжатии больше на 10–20 %. Следовательно, хрупкие материалы работают на сжатие лучше, чем на растяжение.

Испытания на сжатие анизотропных материалов, проявляющих отличие свойств в зависимости от направления, производятся вдоль и поперек волокон. Диаграммы сжатия деревянного образца вдоль и поперек волокон представлены на рис. 5. При сжатии вдоль волокон сопротивление деревянного образца в 7–10 раз выше, чем при сжатии поперек волокон. Дерево проявляет свойства хрупкого материала при сжатии вдоль волокон, и свойства пластичного материала при сжатии поперек волокон, что еще раз демонстрирует анизотропию данного материала. При испытании поперек волокон в качестве разрушающей принимается нагрузка, при действии которой деформация образца составляет 1/3 первоначальной высоты.

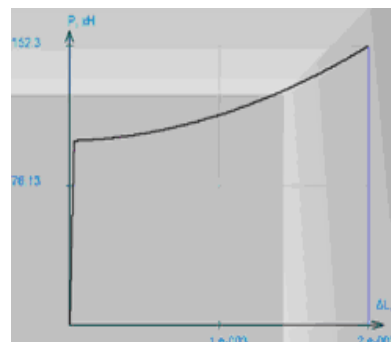


Рис. 5. Диаграмма сжатия деревянных образцов

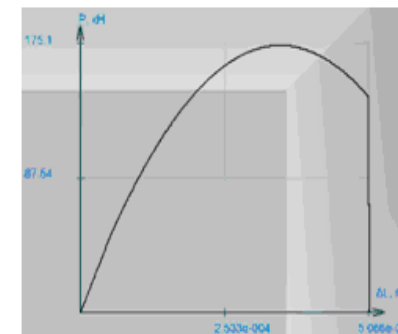
Отношение предела прочности при сжатии вдоль волокон σ'_B к пределу прочности при сжатии поперек волокон σ''_B называется **коэффициентом анизотропии** материала и характеризует различие механических свойств:

$$k = \frac{\sigma'_B}{\sigma''_B}. \quad (3)$$

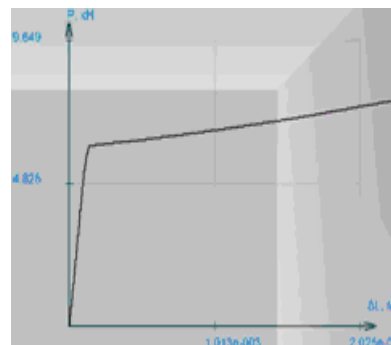
Диаграммы сжатия для образцов из разных материалов, получаемые в данной работе, представлены на рис. 6.



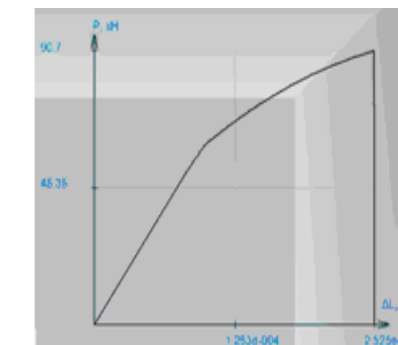
«Сталь 20»



Бетон



Ель поперек волокон



Ель вдоль волокон

Рис. 6. Диаграммы сжатия образцов из разных материалов

Порядок выполнения работы

Установка – гидравлический пресс типа ПГ-100 (рис. 7). Команды управления выведены на панель инструментов (табл. 2).

Испытание наглядно демонстрируется на мониторе (рис. 7). Слева в увеличенном масштабе показан процесс деформации образца из выбранного материала, далее общий вид гидравлического пресса, в правом верхнем углу строится диаграмма сжатия. Под диаграммой расположена панель текущей информации, на которой указываются материал образца, зоны диаграммы и текущие значения нагрузки и деформации.

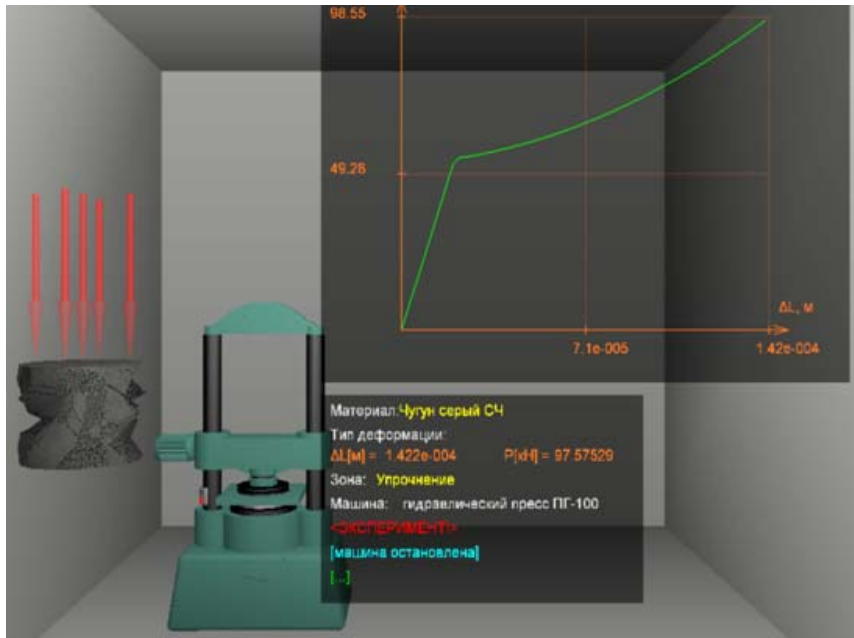


Рис. 7. Общий вид виртуальной лабораторной установки

Таблица 2

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов	Команды
Новый эксперимент	1. Начало эксперимента
Материал образца (серый образец)	2. Выбрать материал образца: «Чугун серый СЧ» Обязательно указать тип деформации и разрушения: пластический, хрупкий, дерево вдоль или поперек волокон, камень (рис. 8)
Настройки	3. Установить параметры эксперимента (рис. 9): – высоту образца h_0 , м; – диаметр образца d_0 , м; – скорость деформирования, м/мин – 0,005; – количество точек графика в наиболее узкой зоне деформации – 5; – количество точек графика для сохранения в файле результатов – 25
Красный образец	4. Установить образец для испытаний

Окончание табл. 2

Панель инструментов	Команды
Запустить стенд	5. Включить гидронасос – выполнение эксперимента
Остановить стенд	6. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

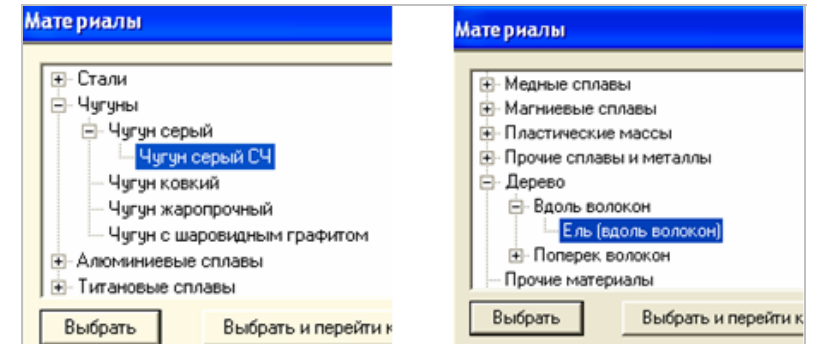


Рис. 8. Выбор материала образца

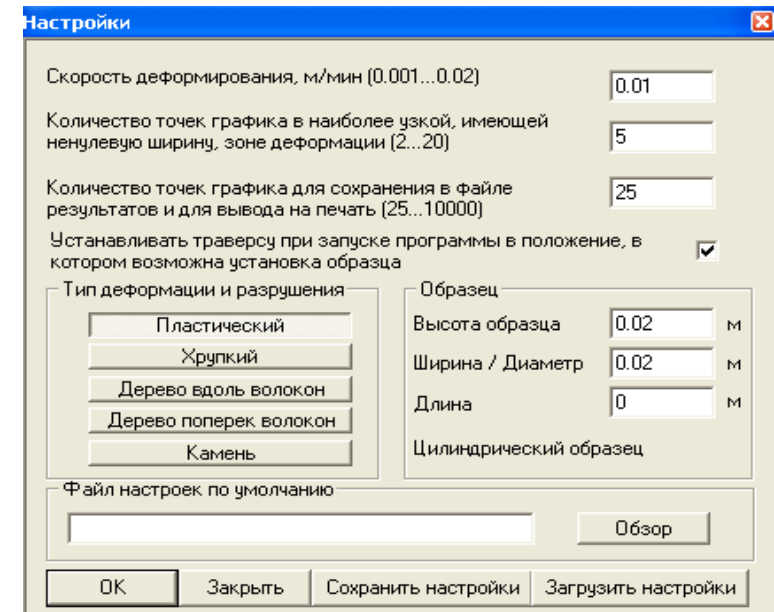


Рис. 9. Настройки параметров эксперимента

Обработка результатов испытаний

После проведения виртуального испытания заполняется таблица опытных данных (табл. 3). Для заполнения графы «Нагрузка» подводится курсор к 4 расчетным точкам диаграммы (рис. 10) и записываются текущие значения нагрузки F , Н и удлинения образца Δl , мм (табл. 3) из панели текущей информации (рис. 11).

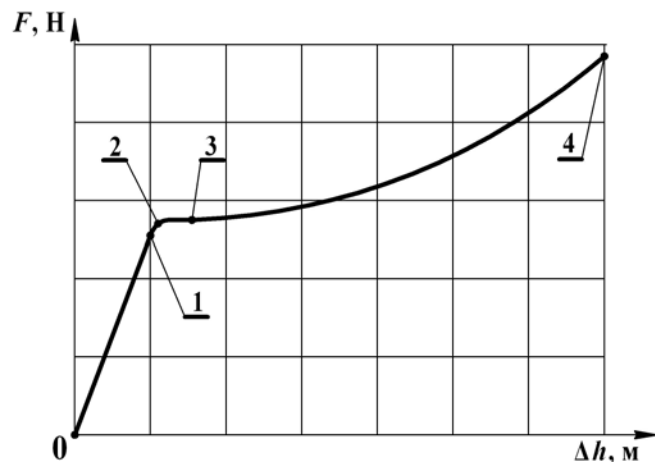


Рис. 10. Расчетные точки диаграммы:

1 – точка окончания зоны упругости; 2 – верхняя точка упругой деформации; 3 – площадка зоны общей текучести; 4 – точка разрушения образца

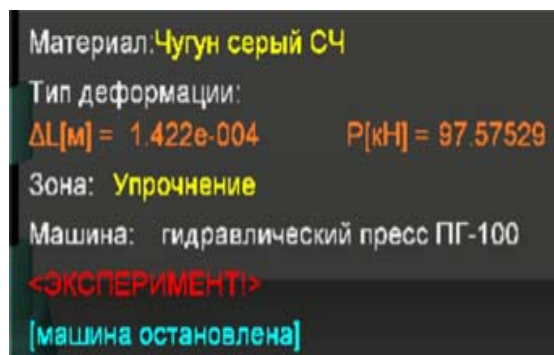


Рис. 11. Схема определения опытных данных

Данные для заполнения графы «Размеры образца» до опыта берутся с панели настройки параметров эксперимента (рис. 9) и рассчитывается начальная площадь поперечного сечения образца A_0 .

Например, образец – «Чугун серый СЧ»:

$$d_0 = \text{_____ мм}, h_0 = \text{_____ мм}, A_0 = \text{_____ мм}^2.$$

По результатам испытаний:

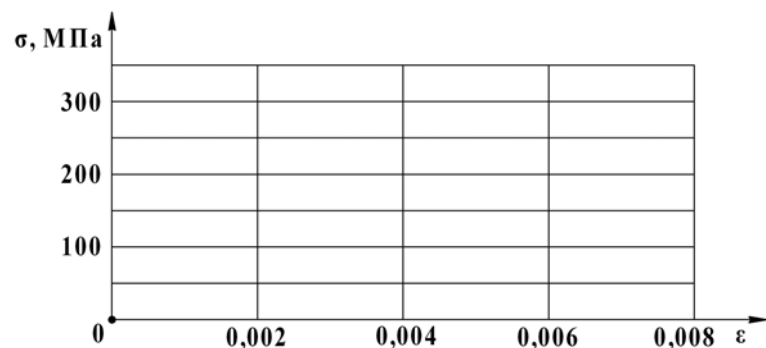
1. Определить экспериментально основные механические характеристики для разных материалов по расчетным формулам (1 и 2) – пределы прочности хрупкого материала: пропорциональности σ_p , упругости σ_y , текучести σ_T и прочности σ_B , а также соответствующие им параметры относительной деформации (табл. 3).

Таблица 3

Механические характеристики материалов образца при сжатии

Показатели соответствующих пределов	Чугун	Сталь	Дерево	
			вдоль волокон	поперек волокон
Параметры диаграммы в координатах $F - \Delta h$				
Продольная сила, Н	F_p			
	F_y			
	F_T			
	F_B			
Деформация, мм	Δh_p			
	Δh_y			
	Δh_T			
	Δh_B			
Параметры диаграммы в координатах $\sigma - \varepsilon$				
Напряжение, МПа $\sigma_i = \frac{F_i}{A_0}$	σ_p			
	σ_y			
	σ_T			
	σ_B			
Относительная деформация $\varepsilon = \frac{\Delta h_i}{h_0}$	ε_p			
	ε_y			
	ε_T			
	ε_B			

2. Построить диаграммы сжатия для разных материалов в координатах $\sigma - \epsilon$:



Контрольные вопросы

1. Чем объясняется бочкообразная форма стального образца при сжатии?
2. В чем отличие разрушения образцов из пластичных и хрупких материалов?
3. В чем различие показателей сжатия пластичных и хрупких материалов?
4. Как происходит разрушение дерева при сжатии вдоль и поперек волокон?
5. Каковы отличия изотропных и анизотропных материалов?

Тема для УИРС

Испытание образцов из полимерных и неметаллических материалов.

Лабораторная работа № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА И МОДУЛЯ ЮНГА

Цель работы: ознакомиться с электротензометрическим методом определения деформаций и принципами тарировки аппаратуры; провести тарировку измерительной аппаратуры в единицах деформации; определить модуль упругости (Юнга) и коэффициент Пуассона для стали.

Теоретическое обоснование

Электротензометрией называется электрический метод измерения малых деформаций в элементах инженерных конструкций и деталях машин. По величинам деформаций могут определяться напряжения, действующие нагрузки, перемещения и другие, связанные с задачами исследования, величины. Так как в реальных условиях прямое измерение деформаций представляет большие технические трудности или практически невозможно, то в настоящее время в измерительной технике широко используют методы преобразования деформаций в другие сравнительно просто измеряемые величины. Наиболее совершенным является метод электротензометрии, при котором используется физическое явление, заключающееся в изменении электрического сопротивления проводника при его деформации. Это явление называется **тензорезистивным эффектом**. Опытами установлено, что относительное изменение омического сопротивления проводника при растяжении и сжатии прямо пропорционально его относительной деформации:

$$\frac{\Delta R}{R} = S \frac{\Delta l}{l} = S \cdot \epsilon, \quad (1)$$

где S – коэффициент тензочувствительности – безразмерная величина, зависящая от материала проводника, для константовой проволоки этот коэффициент равен 2,1;

R, l – начальное омическое сопротивление и длина проводника;
 $\Delta R, \Delta l$ – приращение сопротивления и длины проводника;
 ε – величина относительной деформации при растяжении и сжатии.

Обычно исследователя интересуют деформации в определенных точках детали или конструкции. В связи с этим проводники должны точно воспринимать деформации на небольших участках деталей. Такими чувствительными проводниками-преобразователями являются специальные тензодатчики омического сопротивления – тензорезисторы, прочно наклеиваемые на деформируемые детали. Наибольшее распространение получили константановые проволоочные и фольговые тензорезисторы. Проволоочные тензорезисторы изготавливаются из проволоки диаметром 0,012–0,020 мм, зигзагообразно уложенной между листочками тонкой бумаги (рис. 1).

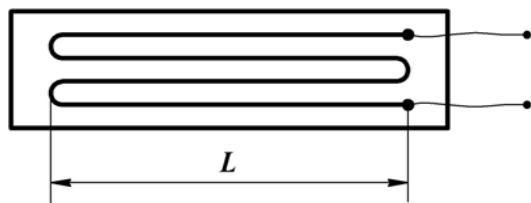


Рис. 1. Тензорезистор – тензометрический датчик

Длина зигзагов (петель) называется **базой тензодатчика**. Тензодатчики выпускаются с базой L равной 5–50 мм и электрическим сопротивлением R – 50, 100, 150, 200 Ом. Наиболее распространены тензодатчики с базой L равной 20 и 25 мм и сопротивлением 100 и 200 Ом. Маркировка тензодатчиков связана с их устройством. Например, маркировка ПКБ-15-100 обозначает проволоочный, константановый тензодатчик, на бумажной основе, с базой 15 мм и сопротивлением 100 Ом. Обозначение ФКП-15-100 расшифровывается следующим образом: фольговый, константановый, прямоугольный. Бумажная прослойка осуществляет изоляцию проволоки от детали. Выводы служат для подключения датчика в измерительную схему. Тензодатчики наклеивают на детали специальными клеями. Это ответственная операция, которая должна быть выполнена тщательно и настолько прочно, чтобы при последующем нагружении поверхностные волокна детали и проволока датчика деформировались как одно целое. При этом вызываемое изменение сопротивления тензодатчика может быть зарегистрировано

с помощью **моста сопротивлений** как изменение электрического тока. Мост сопротивлений представляет собой четыре сопротивления: R_1, R_2, R_3, R_4 , соединенных в виде квадрата (рис. 2).

Диагональ моста BD называется **измерительной диагональю**. В нее включается микроамперметр или осциллограф. Диагональ AC является питающей, так как к ней подводится напряжение от батареи или выпрямителя. Сопротивления R_1 и R_2 , равные по величине, образуют внешний полумост, а одинаковые по величине сопротивления R_3 и R_4 – внутренний полумост, смонтированный внутри прибора. Переменное сопротивление в точке D называется **реохордом** и служит для балансировки моста. Сопротивление R_1 представляет тензодатчик, наклеенный на исследуемую деталь. До приложения нагрузки производится балансировка моста, означающая выполнение равенства:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}. \quad (2)$$

В этом случае, как известно из электротехники, ток в измерительной диагонали BD будет отсутствовать, т. е. стрелка микроамперметра останется на нуле или луч осциллографа будет чертить на экране нулевую линию.

При растяжении детали силами F тензодатчик R_1 получит деформацию. Его сопротивление изменится на некоторую величину ΔR_1 . В результате произойдет разбалансирование моста (нарушится равенство 2) и в измерительной диагонали появится ток i («тензосигнал»), величина которого будет прямо пропорциональна, в общем случае, разности относительных изменений сопротивлений тензодатчиков R_1 и R_2 внешнего полумоста:

$$i = c \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} \right), \quad (3)$$

где c – коэффициент, зависящий от напряжения питания и чувствительности тензодатчика.

Подставляя в (3) выражение (1), получим формулу, связывающую ток в измерительной диагонали моста с разностью деформаций тензодатчиков:

$$i = c \cdot S(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (4)$$

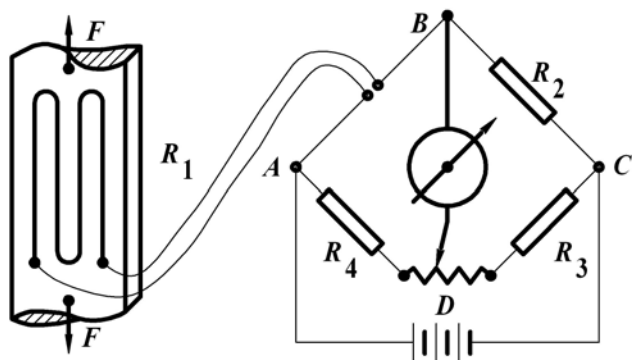


Рис. 2. Схема тензометрического моста

Зависимость (4) является основным **уравнением электротензометрии**. Оно используется для выбора мест размещения тензодатчиков на детали с целью наилучшего выделения интересующих сигналов и автоматической взаимной компенсации ненужных сигналов. Основной погрешностью датчиков сопротивления является температурная погрешность, так как во время опыта они воспринимают не только деформацию от нагрузки, но и тепловую деформацию от изменения температуры. При изменении температуры сопротивление проволоки датчиков существенно меняется. Например, у константанового тензодатчика, наклеенного на стальную деталь, при изменении температуры на 1°C сопротивление меняется на такую величину, как при изменении напряжения в детали на $0,7\text{ МПа}$.

Для компенсации температурной погрешности служит тензодатчик R_2 , который включается во внешний полумост и называется компенсационным (рис. 2). Этот датчик должен иметь одинаковое сопротивление с рабочим датчиком (обычно выбирается из одной партии) и должен наклеиваться на деталь в зоне одинаковой температуры с рабочим датчиком, но в месте, где бы он не испытывал упругих деформаций – на торцах валов, вдоль нейтральных линий и т. д. В тех случаях, когда исключить упругие деформации невозможно, компенсационный датчик наклеивается на отдельную пластинку из того же материала, что и испытываемая деталь, и эта пластинка располагается рядом с рабочим датчиком. Этим достигается единство значений температурных деформаций на рабочем и компенсационном датчиках.

Если температура детали во время опыта изменилась, тогда полная деформация рабочего датчика будет включать упругую и тепловую

деформации, а компенсационная – только тепловую, так как оба датчика внешнего полумоста находятся в области одинаковых температур:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_y + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_2 = 0 + \varepsilon_t; \quad (5)$$

где ε_y и ε_t – соответственно, упругая и тепловая деформации.

Подставляя (5) в (4), получим:

$$i = c \cdot S [(\varepsilon_y + \varepsilon_t) - (0 + \varepsilon_t)] = c \cdot S \varepsilon_1. \quad (6)$$

Таким образом, тепловые деформации в результате вычитания взаимно компенсировались и не повлияли на измерение упругой деформации рабочим датчиком. Изменение сопротивления тензодатчиков при деформации деталей составляет малую величину. Например, при растяжении стального образца с $R_1 = 200\text{ Ом}$, напряжении $\sigma = 10\text{ МПа}$, $S = 2,1$ и модуле упругости $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$ сопротивление тензодатчика, согласно формуле (1), изменится на величину:

$$\Delta R_1 = S \varepsilon R_1 = S \frac{\sigma}{E} R_1 = 2,1 \cdot \frac{10}{2 \cdot 10^5} \cdot 200 = 0,021\text{ Ом}.$$

Малым изменениям сопротивления тензодатчиков соответствуют и слабые токи. Для усиления слабых токов (тензосигналов), возникающих в измерительной диагонали, в схему электротензометрической установки включается усилитель.

Электротензометрический метод позволяет:

- измерять с большой точностью постоянные и переменные деформации;
- проводить измерения на значительных расстояниях от объекта, причем одновременно в нескольких точках и в разных направлениях.

Для определения действительных величин деформаций, напряжений или нагрузок проводится тарировка, т. е. устанавливается цена единицы показаний прибора в единицах деформации, напряжения или нагрузки. Для стрелочных амперметров – это цена одного деления шкалы, для многоканальных измерительных усилителей типа «Спайдер-8» – цена одной единицы цифровой индикации.

Таким образом, тарировочный коэффициент показывает, какой относительной деформации, какому напряжению или силе соответствует одна единица показаний прибора, одно деление шкалы стрелочного прибора, одна единица на табло и т. д. Абсолютная ΔL и относительная ε деформации, напряжение σ или сила F будут вычисляться по формулам:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot n, \quad \sigma = \sigma_0 \cdot n \quad \text{или} \quad F = F_0 \cdot n \quad (7)$$

где n – величина тензосигнала, т. е. число единиц показаний регистрирующего прибора, соответствующее деформации тензодатчика;

$\varepsilon_0, \sigma_0, F_0$ – тарировочные коэффициенты.

Для определения тарировочных коэффициентов проводят специальные опыты, в которых одновременно с измерением исследуемой величины прибором проводится ее непосредственное измерение в месте наклейки датчика другими средствами, например, измерение деформации рычажным тензомером, измерение силы образцовым динамометром и т. д. Подставляя найденные значения изучаемых величин и число единиц показаний прибора в формулу (7), находят искомые значения тарировочных коэффициентов:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma}{n} \quad \text{или} \quad F_0 = \frac{F}{n}. \quad (8)$$

На практике стремятся делать тарировку непосредственно на детали с учетом сопротивления и длины присоединительных проводов, с включением всех приборов, входящих в измерительную схему. В случае если нельзя протарировать датчики непосредственно на детали, то их тарировка проводится на тарировочной балке, представляющей балку равного сопротивления, у которой во всех поперечных сечениях наибольшие нормальные напряжения одинаковы.

При этом обязательными являются наклейки на деталь и тарировочную балку тензодатчиков одной партии. Так как датчики в партии имеют разброс значений коэффициента тензочувствительности в пределах 0,2–1,5 % и разброс сопротивлений в пределах 0,1–0,2 %, то рекомендуется тарировку проводить одновременно не ниже 5 % от числа рабочих датчиков, но не менее 5 штук. Тарировочный коэффициент принимается как среднее по всем тарируемым тензодатчикам.

Определив деформации можно установить физические постоянные материала и прежде всего коэффициент Пуассона и модуль упругости – модуль Юнга.

Коэффициентом Пуассона μ называется абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ε' к относительной продольной деформации ε стержня при растяжении:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (9)$$

Для различных материалов μ изменяется от 0 до 0,5. Для металлов μ составляет 0,25–0,35.

Коэффициент Пуассона и модуль Юнга удобно находить методом электротензометрии для измерения поперечной и продольной деформаций. Исследования по растяжению и сжатию твердых тел из разных материалов и форм поперечного сечения показывают, что их деформации Δl до определенного предела нагружения пропорциональны действующим силам (рис. 3):

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \quad (10)$$

где Δl – абсолютное удлинение (или укорочение) стержня, мм;

l – первоначальная длина стержня, мм;

F – внешняя сила, Н;

A – площадь поперечного сечения стержня, мм²;

E – коэффициент пропорциональности, называемый **модулем упругости** или модулем Юнга, в честь английского ученого Томаса Юнга, который в 1807 г. впервые ввел это фундаментальное понятие, МПа.

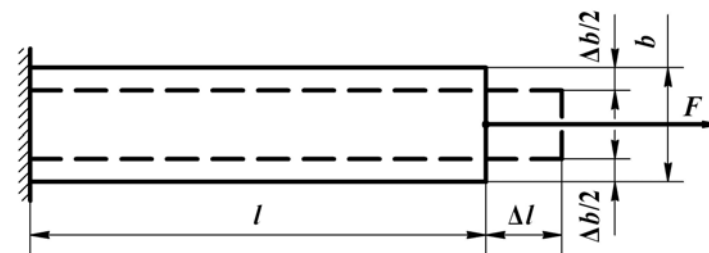


Рис. 3. Схема растяжения стержня

Чтобы исключить влияние геометрического фактора и выделить свойства материала, преобразуем выражение (10) следующим образом;

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}, \quad (11)$$

где $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ – относительная продольная деформация стержня при растяжении.

$\frac{F}{A} = \sigma$ – напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня при растяжении. В результате получим: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, откуда:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (12)$$

Полученное уравнение представляет линейную зависимость между напряжением и деформацией в соответствии с законом Гука при растяжении и сжатии. В виде (12) закон выражает свойства самого материала. Для данного материала модуль Юнга – величина постоянная, определяемая экспериментально.

Модуль Юнга E измеряется в тех же единицах, что и напряжение, например МПа, так как ε – величина безразмерная. Он является важнейшей характеристикой материала и используется в расчетах на прочность и устойчивость.

Порядок выполнения работы

Виртуальная лабораторная установка включает универсальную разрывную машину типа ИР 5047-50 с нагружаемым образцом в виде стальной полосы прямоугольного поперечного сечения (рис. 4). На двух противоположных широких гранях полосы наклеено по паре тензодатчиков с базой $L = 20$ мм. В каждой паре один из них продольный, второй – поперечный. Компенсационный тензодатчик наклеен на дополнительной пластине изготовленной из того же материала, что и образец. Индикатор нагрузки F в виде динамометра расположен в правом верхнем углу.

В процессе проведения лабораторной работы определяются абсолютные линейные деформации ΔL баз тензодатчиков L . Для этого тензодатчики поочередно включаются в одно из плеч моста. Имеется возможность последовательного просмотра показаний каждого тензодатчика.

Величины абсолютных деформаций баз тензодатчиков ΔL , увеличенные в 10^5 раз, показываются в окне цифрового индикатора. Размерность в метрах. Для получения результатов в миллиметрах следует увеличить величину отсчета в 1000 раз. Например: $0,2056813 = 0,2056813 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 206 \cdot 10^{-5} \text{ мм}$.

Относительные деформации ε рассчитываются делением абсолютных деформаций ΔL на длину базы L : $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$. При этом, искомые экспериментальные напряжения σ связаны с относительными деформациями законом Гука: $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Команды управления выведены на панель инструментов (табл. 1).

Экспериментальные параметры:

b – ширина поперечного сечения пластины, мм;

h – соответственно высота сечения, мм;

$k_0 = 10^{-5}$ – тарировочный коэффициент деформации базы тензодатчиков;

$L = 20$ – база тензодатчиков, мм.

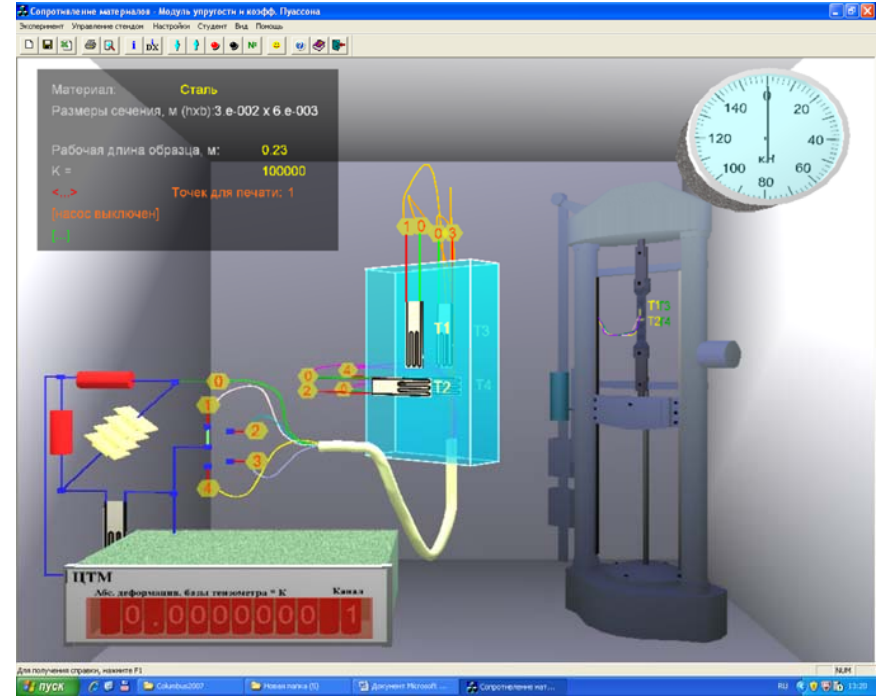


Рис. 4. Общий вид виртуальной лабораторной установки

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов		Команды
Новый эксперимент		1. Начало эксперимента
Настройки		2. Установить параметры эксперимента (рис. 5): – высоту поперечного сечения h , м; – ширину поперечного сечения b , м; – длину рабочей части образца l , м

Окончание табл. 1

Панель инструментов	Команды
Запустить стенд	3. Включить гидронасос – выполнение эксперимента
Опустить траверсу	4. Довести стрелку динамометра до отметки 4 кН
Остановить стенд	5. Выключить нагружение образца
Переключатель каналов	6. Записать показания деформаций тензодатчиков в графы N_1, N_2, N_3 и N_4 табл. 2. Далее, выполняя пункты 4, 5 и 6 через каждые 4 кН довести ступенчато нагрузку до 20 кН
Поднять траверсу	7. Разгрузить балку
Остановить стенд	8. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

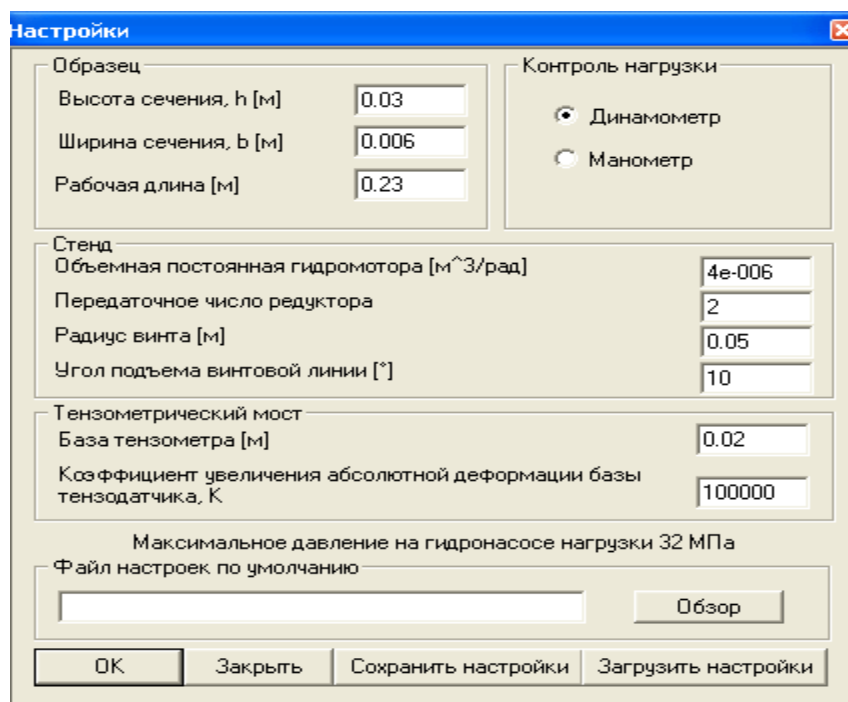


Рис. 5. Настройки параметров эксперимента

Обработка результатов испытаний

Для каждой ступени нагружения определить показания продольных N_1, N_3 и поперечных N_2, N_4 тензодатчиков. Полученные значения записать в табл. 2. Рассчитать средние значения поперечных n' и продольных n показателей на каждой ступени нагружения по уравнениям:

$$n' = \frac{(N_2 + N_4)}{2}; \quad n = \frac{(N_1 + N_3)}{2}.$$

Таблица 2

Показатели		Нагрузка F , Н				
		4000	8000	12000	16000	20000
Показания тензодатчиков	N_1					
	N_2					
	N_3					
	N_4					
Средние значения показаний датчиков	n					
	n'					

1. Определить экспериментальные показатели для каждой ступени нагружения на основании полученных опытных данных (табл. 3):
– изменение поперечного $\Delta L'$ и продольного ΔL размеров образца в пределах базы тензодатчиков $L = 20$ мм:

$$\Delta L' = k_0 \cdot n', \quad \Delta L = k_0 \cdot n;$$

где $k_0 = 10^{-5}$ – тарировочный коэффициент, мм/ед.;

– поперечную ε' и продольную ε относительные деформации путем деления полученных значений $\Delta L'$ и ΔL на величину базы $L = 20$ мм:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta L'}{L}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L};$$

– коэффициент Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|;$$

– площадь поперечного сечения нагружаемого образца: $A = 30 \times 6 = 180 \text{ мм}^2$;

– нормальные напряжения, МПа:

$$\sigma = \frac{F}{A};$$

– модуль Юнга, МПа:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon};$$

– выборочное среднее значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона:

$$E_{\text{ср}} = \frac{\sum_1^n E_i}{n}, \quad \mu_{\text{ср}} = \frac{\sum_1^n \mu_i}{n};$$

где n – число опытов (число ступеней нагружения).

Таблица 3

Экспериментальные параметры

Показатели		Нагрузка F , Н					Среднее значение
		4000	8000	12000	16000	20000	
Абсолютные деформации вдоль и поперек образца	$\Delta L'$						–
	ΔL						–
Поперечная и продольная относительные деформации	ε'						–
	ε						–
Нормальные напряжения	σ						–
Коэффициент Пуассона	μ						
Отклонения от выборочного среднего	$\Delta \mu_i$						–
Модуль Юнга	E						
Отклонения от выборочного среднего	ΔE_i						–

В соответствии с методикой «Особенности обработки опытных данных» определить достоверность полученных результатов (табл. 4).

1. Вычислить отклонения частных значений коэффициента Пуассона $\Delta \mu_i$ и модуля Юнга ΔE_i от выборочных средних величин $\mu_{\text{ср}}$ и $E_{\text{ср}}$:

$$\Delta \mu_i = \mu_{\text{ср}} - \mu_i, \quad \Delta E_i = E_{\text{ср}} - E_i.$$

2. Определить соответствующие стандартные отклонения измерений S_μ и S_E :

$$S_\mu = \sqrt{\frac{\sum (\Delta \mu_i)^2}{n-1}}, \quad S_E = \sqrt{\frac{\sum (\Delta E_i)^2}{n-1}}.$$

3. Рассчитать относительные величины выборочных стандартных отклонений – коэффициенты вариации:

$$v_\mu = \frac{S_\mu}{\mu_{\text{ср}}} \cdot 100\%, \quad v_E = \frac{S_E}{E_{\text{ср}}} \cdot 100\%.$$

4. Определить абсолютные средние ошибки выборочных средних $\mu_{\text{ср}}$ и $E_{\text{ср}}$ при доверительной вероятности $p = 0,95$:

$$t \frac{S_\mu}{\sqrt{n}}, \quad t \frac{S_E}{\sqrt{n}};$$

где t – критерий Стьюдента, берется из табл. 1 (раздела «Особенности обработки данных») в зависимости от выбранной доверительной вероятности p и числа степеней свободы $f = n - 1$.

5. Рассчитать величины доверительных интервалов коэффициента Пуассона и модуля Юнга E :

$$\mu = \mu_{\text{ср}} \pm t \frac{S_\mu}{\sqrt{n}}, \quad E = E_{\text{ср}} \pm t \frac{S_E}{\sqrt{n}}.$$

Таблица 4

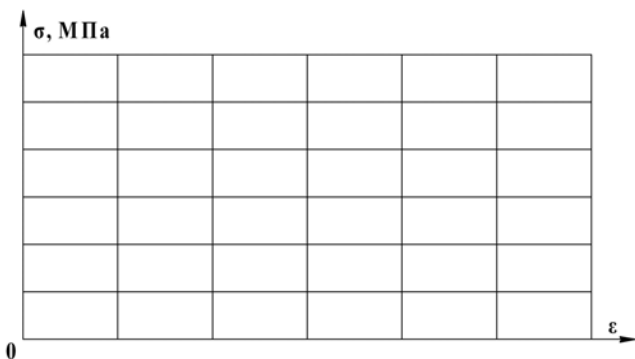
Показатели достоверности полученных параметров

Показатели	Расчетные параметры	Примечания
<i>Коэффициент Пуассона</i>		
Выборочное среднее	$\mu_{\text{ср}}$	
Стандартное отклонение	$S_\mu = \sqrt{\sum (\Delta \mu_i)^2 / (n-1)}$	
Коэффициент вариации	$v_\mu = S_\mu \cdot 100 / \mu_{\text{ср}} \%$	

Окончание табл. 4

Показатели	Расчетные параметры	Примечания
Ошибка выборочной средней	$t \cdot S_{\mu} / \sqrt{n}$	
Доверительный интервал	$\mu = \mu_{\text{ср}} \pm t \cdot S_{\mu} / \sqrt{n}$	
<i>Модуль Юнга</i>		
Выборочное среднее	$E_{\text{ср}}$	
Стандартное отклонение	$S_E = \sqrt{\sum (\Delta E_i)^2 / (n-1)}$	
Коэффициент вариации	$v_E = S_E \cdot 100 / E_{\text{ср}}$	
Ошибка выборочной средней	$t \cdot S_E / \sqrt{n}$	
Доверительный интервал	$E = E_{\text{ср}} \pm t \cdot S_E / \sqrt{n}$	

6. Построить график $\sigma = f(\epsilon)$ и убедиться в справедливости закона Гука:



Контрольные вопросы

1. Дайте определение коэффициента Пуассона. Какие свойства он характеризует?
2. Почему различны знаки поперечной и продольной деформаций при растяжении стержня? Как они обнаруживаются в данной работе?

3. В чем сущность основного уравнения тензометрии?
4. Объясните действие компенсационного датчика.
5. Что означает тарировочный коэффициент?
6. В чем сущность явления, называемого тензорезистивным эффектом?
7. Как располагается компенсационный датчик на детали? Почему?
8. Что такое тензорезистор и какими параметрами он характеризуется?
9. Когда компенсационный датчик является активным и когда – пассивным?
10. В какой зоне диаграммы растяжения проводится опыт по определению модуля продольной упругости?
11. Как формулируется закон Гука?
12. Для каких материалов закон Гука соблюдается с большой степенью точности, и для каких является приближенным?

Темы для УИРС

1. Влияния базы и сопротивления тензорезисторов на уровень тензосигнала.
2. Определение коэффициента Пуассона для неметаллических материалов (пластмасс), для нелинейно-упругих материалов.
3. Изменения тарировочного коэффициента от величины сопротивления рабочих датчиков и при использовании активных компенсационных датчиков.

ИСПЫТАНИЕ СТАЛЬНОЙ БАЛКИ НА ЧИСТЫЙ ИЗГИБ

Цель работы: экспериментально определить нормальные напряжения в 5 точках по высоте сечения двутавровой балки при чистом изгибе и сравнить полученные экспериментальные напряжения, прогибы балки и углы поворота поперечных сечений с их величинами, вычисленными теоретически. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

Теоретическое обоснование

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки действует изгибающий момент M . В зависимости от наличия в поперечных сечениях внутренних силовых факторов различают изгибы:

– **чистый**, когда в поперечных сечениях действует только один изгибающий момент M , а все другие внутренние силовые факторы отсутствуют;

– **поперечный**, когда в поперечных сечениях наряду с изгибающим моментом M действует поперечная сила Q , при этом крутящий момент T и нормальная сила N могут быть, а могут и отсутствовать;

– **продольный** и **продольно-поперечный**, когда одновременно с нормальной N и поперечной Q силами действует изгибающий момент M ; крутящий момент T отсутствует.

Каждый вид изгиба, в свою очередь, может быть **прямым** или **косым**, при этом косоу изгиб бывает плоским и пространственным. Известно, что нормальные напряжения $\sigma = f(M)$ зависят только от изгибающего момента M , а касательные $\tau = f(Q)$ – от поперечной силы Q . Поэтому вывод расчетной формулы нормальных напряжений для чистого изгиба производится, когда поперечная сила $Q = 0$.

При чистом изгибе:

– справедлива гипотеза плоских сечений, т. е. сечения, будучи плоскими до нагружения, остаются плоскими и после нагружения, лишь поворачиваясь на некоторый угол;

– деформацию балки можно рассматривать как поворот жестких плоских поперечных сечений друг относительно друга, потому что при $Q = 0$ и $T = 0$ соседние по высоте волокна друг друга не давят, а испытывают лишь растяжение или сжатие;

– существует **нейтральный слой**, в котором волокна сохраняют свою длину, так как при деформации верхние волокна удлиняются, а нижние укорачиваются.

Если балку рассечь плоскостью, перпендикулярной оси, то в результате пересечения ее с нейтральным слоем в поперечном сечении образуется прямая, которая называется **нейтральной линией**. На нейтральной линии деформации и напряжения равны нулю: $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot 0 = 0$ (рис. 1).

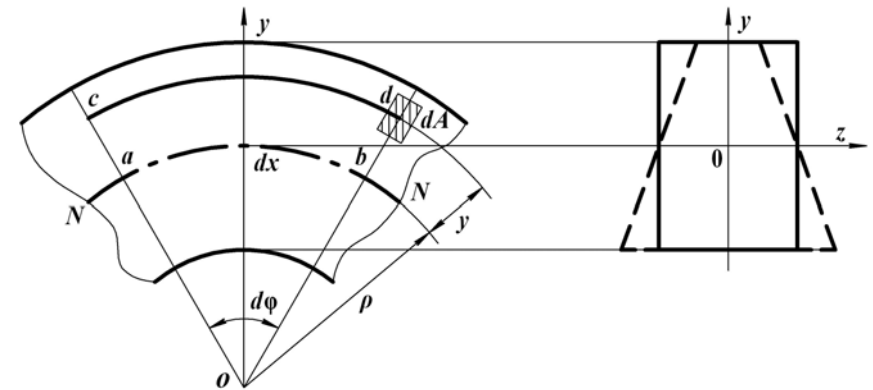


Рис. 1. Схема деформации стержня при чистом изгибе

Обозначим бесконечно малый элемент балки после деформации через dx ; NN – нейтральный слой; O – центр кривизны нейтрального слоя; ρ – радиус кривизны нейтрального слоя; $d\varphi$ – угол между сечениями. Из рис. 1 видно, что волокна ab принадлежат нейтральному слою NN и его длина до и после деформации будет равна dx .

Так как до деформации все волокна имели длину $dx = ab$, то относительная продольная деформация волокна cd , расположенного на расстоянии y от нейтрального слоя, будет равна:

$$\varepsilon = \frac{cd - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (1)$$

Из полученной зависимости (1) следует, что относительные продольные деформации прямо пропорциональны расстоянию y волокна от нейтрального слоя и обратно пропорциональны его радиусу кривизны ρ . Поскольку линейные деформации ε сопровождаются поперечными $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$, при растяжении – сужением, а при сжатии – расширением в поперечном направлении пропорционально коэффициенту Пуассона μ , то форма сечения балки при изгибе изменяется. Первоначальное прямоугольное поперечное сечение превращается в сечение трапециевидальной формы (рис. 1).

Так как при чистом изгибе поперечная сила $Q = 0$ и касательные напряжения $\tau = 0$, то между продольными волокнами отсутствует взаимодействие. Таким образом, при чистом изгибе материал находится в одноосном напряженном состоянии. В одной части сечения он растягивается, в другой – сжимается. Следовательно, в соответствии законом Гука:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \frac{y}{\rho}. \quad (2)$$

Полученное выражение (2) показывает, что:

- нормальные напряжения в поперечном сечении балки изменяются по линейному закону;
- напряжения в волокне прямо пропорциональны его расстоянию от нейтральной линии;
- максимальные напряжения возникают в крайних волокнах сечения.

Распределенные по сечению напряжения должны дать пару сил с моментом, равным изгибающему моменту, действующему в данном сечении. Выделим элементарную площадку dA (рис. 1) на расстоянии y от нейтральной линии. Элементарный изгибающий момент, создаваемый элементарной силой, действующей на площадку относительно нейтральной линии, будет:

$$dM = \sigma_x y dA. \quad (3)$$

Полный изгибающий момент в сечении равен интегралу (4) по всей площади сечения:

$$M = \int_A \sigma_x y dA = \int_A \frac{E y}{\rho} y dA, \quad M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}; \quad (4)$$

где $\int_A y^2 dA = I_z$ – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Так как в поперечном сечении отсутствует нормальная сила N , то интеграл от элементарной силы σdA на площадке dA , взятый по всей площади сечения, должен быть равен нулю:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Так как $\frac{E}{\rho} \neq 0$, то $\int_A y dA = S_z = 0$.

Интеграл $\int_A y dA = S_z$ – есть статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси. Так как S_z равен нулю, то **нейтральная линия** проходит **через центр тяжести** сечения и является **главной центральной осью**.

Подставляя (4) в (2), получим расчетную формулу, позволяющую определить напряжения в любой точке поперечного сечения балки. Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в сечении возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной оси y_{\max} и определяют условие прочности балки:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M_{\max}}{W_z} \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (5)$$

где $W_z = I_z / y_{\max}$ – **осевой момент сопротивления**:

– круг:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}, \quad I_z = \frac{\pi d^4}{64};$$

– кольцо:

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4), \quad c = \frac{d}{D}, \quad I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4);$$

– прямоугольник:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad \text{или} \quad W_z = \frac{b(cb)^2}{6} = \frac{c^2 b^3}{6}, \quad c = \frac{h}{b}, \quad I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Порядок выполнения работы

Испытание двутавровой балки на чистый изгиб имитирует виртуальная лабораторная установка на специальном стенде (рис. 2). Она позволяет осуществлять пошаговое нагружение и разгрузку балки с контролем нагрузки динамометром, контролем прогибов в месте приложения нагрузки и на конце балки по индикаторам часового типа и контролем напряжений по высоте балки с помощью тензодатчиков и цифрового тензометрического моста. За деформацией балки можно наблюдать по ее каркасной модели, а настройка параметров эксперимента показана на рис. 3.

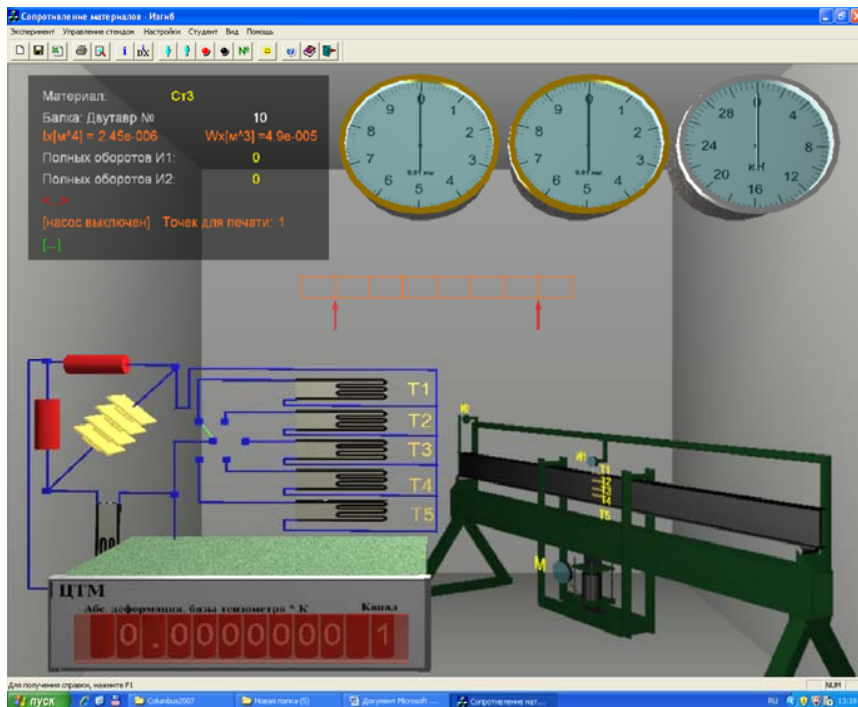


Рис. 2. Общий вид виртуальной лабораторной установки

Чистый изгиб создается на среднем участке шарнирно опертой балки нагруженной двумя равными силами, приложенными на равных расстояниях от опор – симметричное нагружение, контролируемое динамометром. В сечениях этого участка изгибающий момент M

имеет постоянное значение – поперечная сила Q равна нулю. При чистом изгибе на ненагруженных поверхностях имеет место, как отмечалось, линейное напряженное состояние и напряжения σ связаны с относительными деформациями в соответствии законом Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Таким образом, зная экспериментально величину относительной деформации ε , можно вычислить напряжение по тому же направлению. Относительная деформация в исследуемых точках балки определяется тензометрическим методом. Тензодатчики наклеены в 5 точках на разной высоте y от нейтральной линии поперечного сечения с высотой $h = 100$ мм:

$$y_1 = -h/2, \quad y_2 = -h/4, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = h/4, \quad y_5 = h/2.$$

Величины абсолютных деформаций баз тензодатчиков, увеличенные в 10^5 раз, показываются в окне цифрового индикатора деформаций. Размерность в метрах. Имеется возможность просмотра показаний каждого тензодатчика.

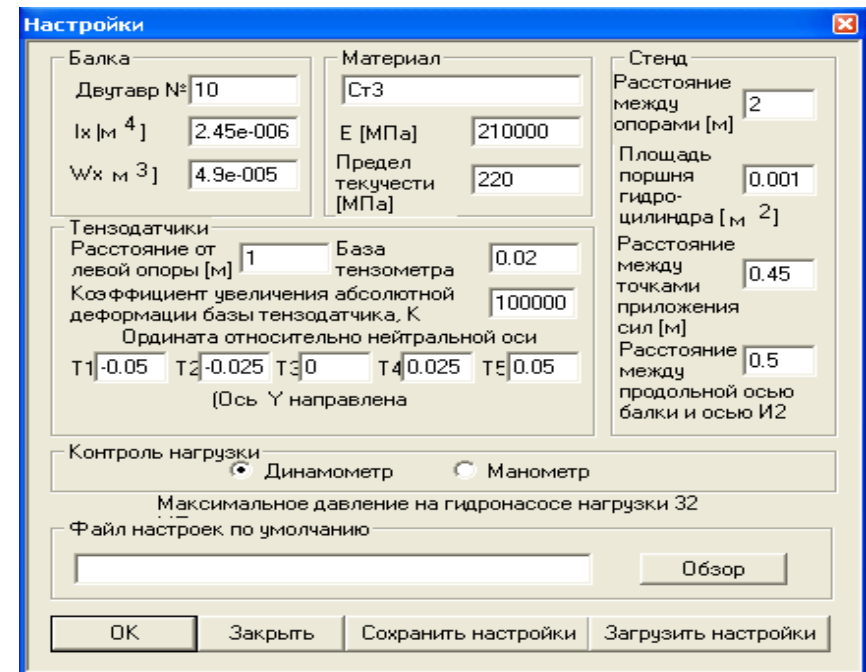


Рис. 3. Настройки параметров эксперимента

Таблица 2

Исходные данные и экспериментальные показатели

Показатели	Тензодатчики				
	1	2	3	4	5
Расчетная нагрузка $F = 0,5F_{\text{динамометра}}$, кН					
Показания тензодатчиков N_i , ед.					
Нормальные напряжения σ , МПа					
Рычажные тензометры	1		2		
Показания рычажных тензометров T_b ед.					
Прогиб f_D , мм и угол поворота сечения φ_C					

Обработка результатов испытаний

1. На основании экспериментальных показателей, полученных при испытании двутавровой балки на чистый изгиб, определить:
– нормальные напряжения, МПа:

$$\sigma_i = \frac{E}{L \cdot k_T} \cdot N_i,$$

где N_i – абсолютное удлинение базы тензодатчика $L = 20$ мм;
 $k_T = 10^5$ – увеличение отсчета прибором деформации базы тензодатчика:

$\sigma_1 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_2 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_3 = 0$; $\sigma_4 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_5 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа;
– прогиб середины балки в точке D , мм:

$$f_{\text{оп}} = -k_{\text{и}} \cdot T_1;$$

где T_1 – отсчет по шкале индикатора часового типа с ценой деления $k_{\text{и}} = 0,01$ мм;

– угол поворота сечения в точке C , рад.:

$$\varphi_{\text{оп}} = -k_{\text{и}} \frac{T_2}{b},$$

где T_2 – аналогично, отсчет перемещения конца консоли по шкале индикатора;

b – длина консоли – расстояние от опоры B до индикатора № 2.

Под серединой балки установлен индикатор часового типа № 1 для измерения прогиба, а в торце балки на приваренной консоли в горизонтальном направлении на расстоянии 500 мм от оси опоры – индикатор № 2 для определения угла поворота опорного сечения (рис. 2). Управление командами на панели инструментов (табл. 1).

Установка для испытаний на изгиб. Балка – двутавр № 10, $h = 100$ мм:

l – пролет балки, мм;

l_p – расстояние между сосредоточенными силами F , мм;

a – расстояние от оси опоры до сечения с тензодатчиками, мм;

b – расстояние индикатора № 2 от оси опоры балки, мм.

$k_{\text{и}} = 0,01$ – цена деления индикатора часового типа, мм;

$L = 20$ – база тензодатчика, мм.

$I_z = 245 \cdot 10^4$ – осевой момент инерции сечения, мм⁴;

$E = 2 \cdot 10^5$, МПа.

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов		Команды
Новый эксперимент		1. Начало эксперимента
Настройки		2. Установить параметры эксперимента (рис. 3): – материал образца из предлагаемого перечня, – № двутавра и размеры поперечного сечения, – расстояние между опорами, м
		3. Включить гидронасос – выполнение эксперимента
Опустить траверсу		4. Довести стрелку динамометра до отметки 10 кН
Остановить стенд		5. Выключить нагружение балки
Переключатель каналов		6. Записать показания деформаций баз тензодатчиков в графы N_1, N_2, N_3, N_4 и N_5 табл. 2. Записать показания индикаторов часового типа № 1 и 2 в графы T_1 и T_2 табл. 2
		7. Разгрузить балку
Остановить стенд		8. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

2. Используя расчетную схему балки (рис. 4), определить:
– изгибающий момент в сечении D , Н·мм:

$$M = \frac{B_y \cdot (l - l_p)}{2};$$

– нормальные напряжения, МПа:

$$\sigma_i = \frac{M}{I_z} \cdot y_i,$$

$\sigma_1 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_2 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_3 = 0$; $\sigma_4 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_5 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа;

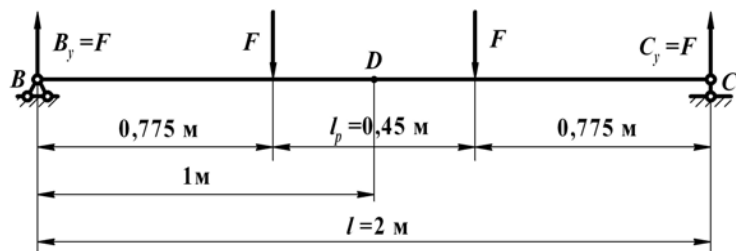


Рис. 4. Схема нагружения балки

– начальные параметры, исходя из общих уравнений прогибов и углов поворота поперечных сечений при изгибе:

$$EJ_z y_x = EJ_z y_0 + EJ_z \theta_0 \cdot x + m \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24},$$

$$EJ_z \theta_x = EJ_z \theta_0 + m \cdot (x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} - q \frac{(x-d)^3}{6};$$

– угол поворота сечения C при условии $y_0 = y_C = 0$ и $\theta_0 = \varphi_C = \varphi_B = \varphi$:

$$y_C = EJ_z \theta_0 l + \frac{F \cdot l^3}{6} - \frac{F \cdot (l + l_p)^3}{6 \cdot 2} - \frac{F \cdot (l - l_p)^3}{6 \cdot 2} = 0,$$

$$EJ_z \theta_0 \cdot l = -\frac{F \cdot l^3}{6} + \frac{F}{6 \cdot 8} (l^3 + 3l^2 \cdot l_p + 3l \cdot l_p^2 + l_p^3 + l^3 - 3l^2 \cdot l_p + 3l \cdot l_p^2 - l_p^3) = -\frac{F \cdot l(l^2 - l_p^2)}{8},$$

$$\varphi = \theta_0 = -\frac{F \cdot (l^2 - l_p^2)}{8EJ_z} \text{ рад.};$$

– прогиб f , мм в точке D при условии $y_0 = y_C = 0$ и $\theta_0 = \varphi_C = \varphi_B = \varphi$:

$$f = \frac{1}{EI_z} \left[-\frac{F}{8} (l^2 - l_p^2) \cdot \frac{l}{2} + \frac{F}{6} \left(\frac{l}{2} \right)^3 - \frac{F}{6} \left(\frac{l_p}{2} \right)^3 \right] = -\frac{F \cdot (2l^3 - 3l \cdot l_p^2 + l_p^3)}{48EI_z},$$

$$f = -\frac{F \cdot (2l^3 - 3l \cdot l_p^2 + l_p^3)}{48EI_z};$$

– относительную ошибку прогибов $f_{\text{он}}$ от f и углов поворота $\varphi_{\text{он}}$ от φ :

$$\Delta f = \frac{f_{\text{он}} - f}{f} \cdot 100 \%,$$

$$\Delta \varphi = \frac{\varphi_{\text{он}} - \varphi}{\varphi} \cdot 100 \%.$$

Контрольные вопросы

1. Как классифицируются изгибы по видам нагружений?
2. Какой вид изгиба может быть прямым или косым?
3. Чем определяется нейтральный слой и что такое нейтральная линия?
4. Какие гипотезы применяются в расчетах параметров изгибов?
5. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки при чистом изгибе?
6. Как используются дифференциальные зависимости q , Q и M для построения эпюр?
7. Чем определяется экстремум эпюры изгибающего момента?
8. Как формулируется условие прочности при изгибе?
9. Как изменяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки?
10. Чему равны касательные напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе?

Тема для УИРС

Нормальные напряжения в деревянной балке при чистом изгибе.

ИСПЫТАНИЕ СТАЛЬНОЙ БАЛКИ НА ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Цель работы: экспериментально определить нормальные напряжения в 5 точках по высоте сечения двутавровой балки при поперечном изгибе и сравнить полученные экспериментальные напряжения, прогибы балки и углы поворота поперечных сечений с их величинами, вычисленными теоретически. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

Теоретическое обоснование

Изгиб бруса вызывает возникновение в нем внутреннего силового фактора – изгибающего момента. Если в поперечных сечениях бруса изгибающий момент действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции, то изгиб называется прямым. Невыполнение этого условия соответствует косому изгибу. Система приложенных к брусу внешних нагрузок вызывает один из видов изгибов: поперечный, чистый или продольно-поперечный изгиб.

Поперечный изгиб характеризуется наличием в сечениях изгибающего момента M и поперечной силы Q , при этом дополнительно могут действовать крутящий момент T и нормальная сила N . Поперечная сила Q является равнодействующей внутренних касательных сил, возникающих в поперечных сечениях бруса. Изгибающий момент M определяет нормальные напряжения $\sigma = f(M)$, а поперечная сила Q – касательные $\tau = f(Q)$. Наличие касательных напряжений вызывает давление продольных волокон друг на друга. В результате взаимодействия волокон материал будет находиться не в линейном, как при чистом изгибе, а в плоском напряженном состоянии. Наличие касательных напряжений вызывает в каждой элементарной площадке сечения появление угловых деформаций $\gamma = \tau / G$.

Так как касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно, то также неравномерно будут распределяться и угловые

деформации, например на нейтральной оси они будут иметь максимальное значение, а в верхней и нижней точках сечения – равны нулю. Искривление сечений бруса при поперечном изгибе показано на рис. 1.

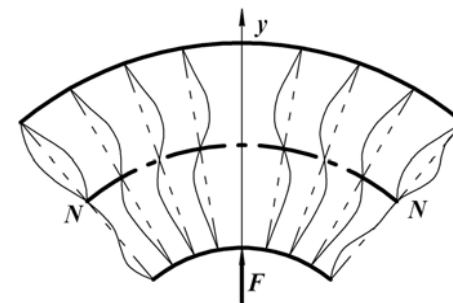


Рис. 1. Схема деформации стержня при поперечном изгибе

Точные расчеты с использованием теории упругости показывают, что искривление поперечных сечений лишь незначительно отражается на величине нормальных напряжений, определенных по формулам чистого изгиба. В частности, когда поперечная сила Q постоянна по длине балки, все поперечные сечения искажаются одинаково. В этом случае искривление поперечных сечений, обусловленное сдвигом, не оказывает влияния на удлинения продольных волокон, вызываемые изгибающим моментом, поэтому формулы для нормальных напряжений, кривизны, продольных деформаций, выведенные для чистого изгиба, будут давать точные результаты и для поперечного изгиба.

Когда поперечная сила Q изменяется вдоль балки, формулы чистого изгиба для σ дают погрешность, величина которой имеет порядок h / l по сравнению с единицей, где h – высота поперечного сечения, l – длина балки. Так как на практике величина h / l очень мала, то соответственно незначительной будет указанная погрешность. Таким образом, при поперечном изгибе вполне приемлемо пользоваться формулами чистого изгиба.

Порядок выполнения работы

Испытание двутавровой балки на поперечный изгиб имитирует виртуальная лабораторная установка на специальном стенде (рис. 2). Она позволяет осуществлять пошаговое нагружение и разгрузку

балки с контролем нагрузки динамометром, контролем прогибов в месте приложения нагрузки и на конце балки по индикаторам часового типа и контролем напряжений по высоте балки с помощью тензодатчиков и цифрового тензометрического моста – тензометрической системы. За деформацией балки можно наблюдать по ее кар-касной модели.

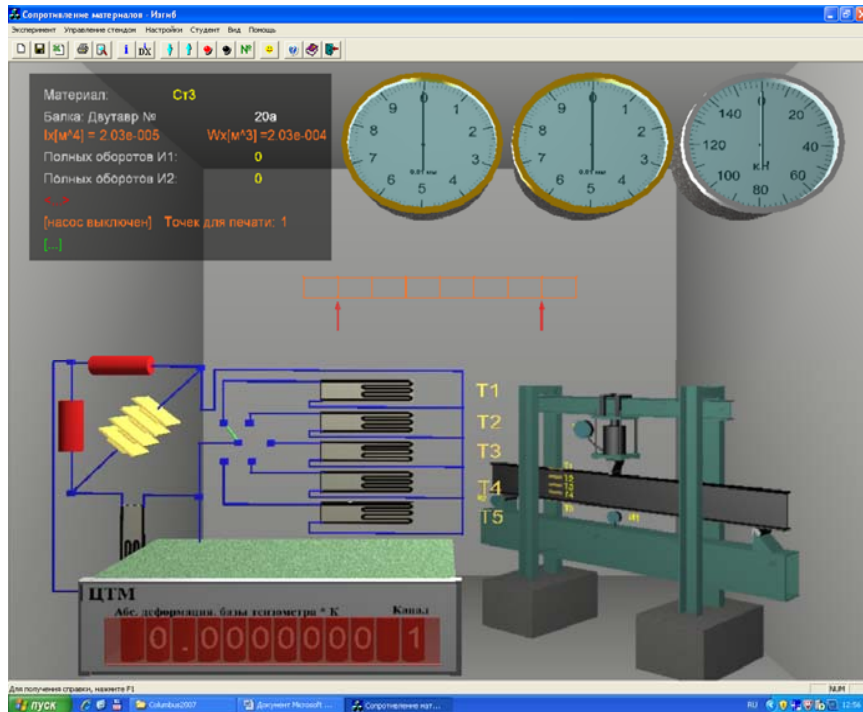


Рис. 2. Общий вид виртуальной лабораторной установки

При поперечном изгибе возникает плоское напряженное состояние, а напряжения определяются в соответствии с обобщенным законом Гука тензометрическим методом «розеток» из 3-х тензодатчиков. В настоящей ВЛР поперечным сжатием пренебрегают ввиду его незначительной величины. Однако это упрощение является причиной отличия экспериментальной и теоретической эпюр напряжений. Предполагая линейное напряженное состояние на ненагруженных поверхностях балки, напряжения σ связаны с относительными деформациями ϵ законом Гука: $\sigma = E \cdot \epsilon$.

Таким образом, зная экспериментально величину относительной деформации, можно вычислить напряжение по тому же направлению. Относительная деформация в исследуемых точках балки определяется тензометрическим методом. Тензодатчики наклеены в 5 точках на разной высоте y от нейтральной линии поперечного сечения с высотой $h = 200$ мм:

$$y_1 = -h/2, \quad y_2 = -h/4, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = h/4, \quad y_5 = h/2.$$

Величины абсолютных деформаций баз тензодатчиков, увеличенные в 10^5 раз, показываются в окне цифрового индикатора деформаций. Размерность в метрах. Имеется возможность просмотра показаний каждого тензодатчика. Напряжение гидравлическим домкратом контролируется динамометром.

Под серединой балки установлен индикатор № 1 часового типа для измерения прогиба, а в торце балки на консоли в горизонтальном направлении на расстоянии 100 мм от оси опоры балки – индикатор № 2 для определения угла поворота опорного сечения (рис. 2). Управление командами на панели инструментов (табл. 1).

Установка для испытаний на изгиб. Балка – двутавр № 20а. $h = 200$ мм:

- L – пролет балки, мм;
- a – расстояние от оси опоры до сечения с тензодатчиками, мм;
- b – расстояние индикатора № 2 от оси опоры балки, мм;
- $k_i = 0,01$ – цена деления индикатора часового типа, мм;
- $L = 20$ – база тензодатчика, мм;
- $I_z = 2030 \cdot 10^4$ – осевой момент инерции сечения, мм⁴;
- $E = 2 \cdot 10^5$, МПа.

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов		Команды
Новый эксперимент		1. Начало эксперимента
Настройки		2. Установить параметры эксперимента (рис. 3): – материал образца из предлагаемого перечня; – № двутавра и размеры поперечного сечения; – расстояние между опорами, м
Запустить стенд		3. Включить гидронасос – выполнение эксперимента

Панель инструментов	Команды
Опустить траверсу	4. Довести стрелку динамометра до отметки 50 кН
Остановить стенд	5. Выключить нагружение балки
Переключатель каналов	6. Записать показания деформаций баз тензодатчиков в графы N_1, N_2, N_3, N_4 и N_5 табл. 2. Записать показания индикаторов часового типа № 1 и 2 в графы T_1 и T_2 табл. 2
Запустить стенд	7. Включить гидронасос
Поднять траверсу	8. Разгрузить балку
Остановить стенд	9. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

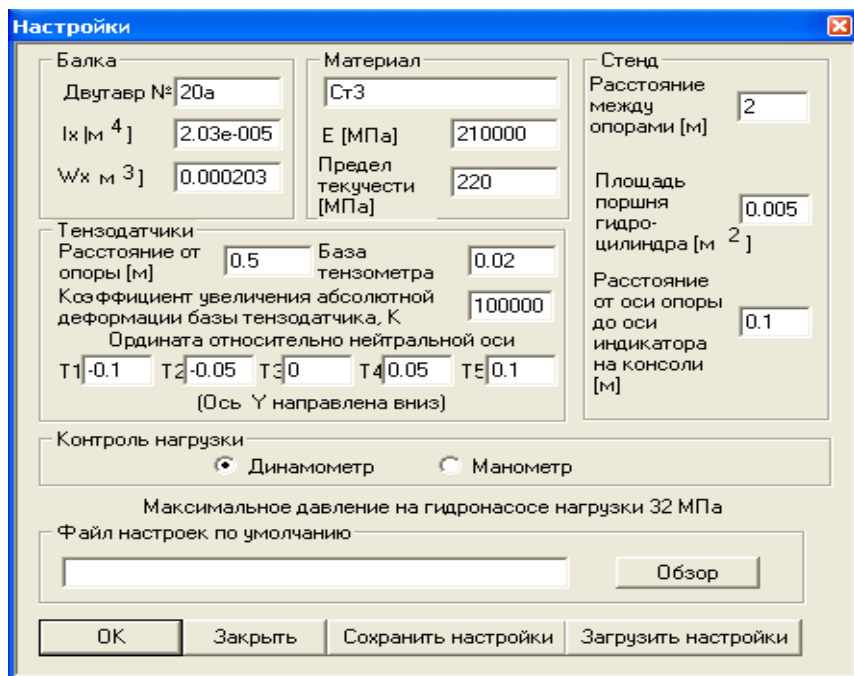


Рис. 3. Настройки параметров эксперимента

Исходные данные и экспериментальные показатели

Показатели	Тензодатчики				
	1	2	3	4	5
Расчетная нагрузка F , кН					
Показания тензодатчиков N_i , ед.					
Нормальные напряжения σ , МПа					
Рычажные тензометры	1		2		
Показания рычажных тензометров T_i , ед.					
Прогиб f_D , мм и угол поворота сечения φ_C					

Обработка результатов испытаний

1. На основании экспериментальных показателей, полученных при испытании двутавровой балки на чистый изгиб, определить:
– нормальные напряжения, МПа:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{N_i}{L \cdot k_T};$$

где N_i – абсолютное удлинение базы тензодатчика $L = 20$ мм;
 $k_T = 10^5$ – увеличение отсчета прибором величины деформации базы тензодатчиков:

$\sigma_1 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_2 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_3 = 0$; $\sigma_4 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа; $\sigma_5 = \underline{\hspace{1cm}}$ МПа;
– прогиб середины балки, мм:

$$f_D = -k_n \cdot T_1;$$

где T_1 – отсчет по шкале индикатора часового типа с ценой деления $k_n = 0,01$ мм;

– угол поворота сечения в точке C , рад.:

$$\varphi_C = -k_n \cdot \frac{T_2}{b};$$

где T_2 – аналогично, отсчет перемещения конца консоли по шкале индикатора;

b – длина консоли – расстояние от опоры B до индикатора № 2.

2. Используя расчетную схему балки (рис. 4), определить:
– изгибающий момент M , Н·мм в расчетном сечении E :

$$M = B_y \cdot a;$$

– нормальные напряжения, МПа:

$$\sigma_i = \frac{M}{I_z} \cdot y_i;$$

$$\sigma_1 = \text{___ МПа}; \sigma_2 = \text{___ МПа}; \sigma_3 = 0; \sigma_4 = \text{___ МПа}; \sigma_5 = \text{___ МПа};$$

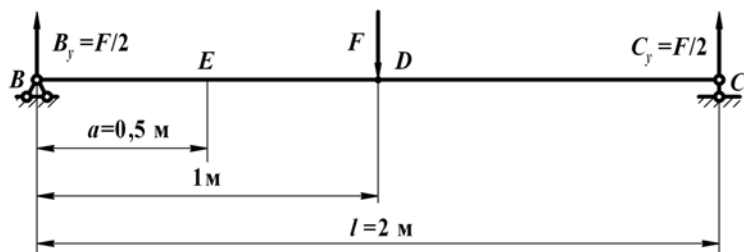


Рис. 4. Схема нагружения балки

– начальные параметры, исходя из общих уравнений прогибов и углов поворота поперечных сечений при изгибе:

$$EJ_z y_x = EJ_z y_0 + EJ_z \theta_0 \cdot x + m \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24},$$

$$EJ_z \theta_x = EJ_z \theta_0 + m \cdot (x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} - q \frac{(x-d)^3}{6};$$

– угол поворота опорного сечения при условии $y_0 = y_C = 0$ и $\theta_0 = \varphi_C = \varphi_B = \varphi$:

$$y_C = EJ_z \cdot \theta_0 \cdot l + \frac{F}{2 \cdot 6} l^3 - \frac{F}{2 \cdot 6} \left(\frac{l}{2}\right)^3 = 0,$$

$$EJ_z \cdot \theta_0 \cdot l = -\frac{F}{2 \cdot 6} l^3 + \frac{F}{6} \left(\frac{l}{2}\right)^3 = -\frac{F}{12} l^3 + \frac{F}{48} l^3 = -\frac{F \cdot l^3}{16},$$

$$\varphi = \theta_0 = -\frac{F \cdot l^2}{16EI_z} \text{ рад.};$$

– прогиб f , мм середины балки при условии $y_0 = y_C = 0$ и $\theta_0 = \varphi_C = \varphi_B = \varphi$:

$$f = \frac{1}{EI_z} \left[-\frac{F \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l}{2} + \frac{F}{2 \cdot 6} \left(\frac{l}{2}\right)^3 \right] = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{F \cdot l^3}{32} + \frac{F \cdot l^3}{96} \right) = -\frac{F \cdot l^3}{48EI_z},$$

$$f = -\frac{F \cdot l^3}{48EI_z};$$

– относительная ошибка опытных прогибов $f_{\text{оп}}$ от f и углов поворота $\varphi_{\text{оп}}$ от φ :

$$\Delta f = \frac{f_{\text{оп}} - f}{f} \cdot 100\%,$$

$$\Delta \varphi = \frac{\varphi_{\text{оп}} - \varphi}{\varphi} \cdot 100\%.$$

Контрольные вопросы

1. Какие внутренние силовые факторы определяют поперечный изгиб?
2. Взаимодействуют ли продольные волокна при поперечном изгибе?
3. Как распределяются угловые деформации в поперечном сечении балки?
4. Какое напряженное состояние вызывает поперечный изгиб?
5. Какие показатели поперечного изгиба балки определяются методом начальных параметров?
6. Для какой балки заранее известны начальные параметры?
7. Как распределены касательные напряжения в прямоугольном сечении?
8. Как распределены касательные напряжения в сечении двутавра?
9. Какие факторы определяют рациональные формы балок из пластичных материалов?
10. Какие балки из хрупких материалов наиболее рациональны?

Тема для УИРС

Касательные напряжения в двутавровой балке при поперечном изгибе.

Лабораторная работа № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА СТАЛИ

Цель работы: экспериментально проверить закон Гука при кручении стального стержня круглого поперечного сечения и определить модуль сдвига.

Теоретическое обоснование

Опыты показывают, что для многих материалов при чистом сдвиге в пределах малых углов закручивания наблюдается линейная зависимость между касательным напряжением и углом сдвига:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (1)$$

где G – модуль сдвига,

γ – угол сдвига при кручении.

Эта зависимость называется законом Гука при сдвиге и формулируется следующим образом: касательные напряжения прямо пропорциональны углу сдвига.

Модуль сдвига является физической постоянной материала, характеризующей его способность сопротивляться упругим деформациям при сдвиге. Из выражения (1) следует, что модуль сдвига G имеет размерность напряжений, например, МПа, так как угол сдвига величина безразмерная. Модуль сдвига связан с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2)$$

Для каждого материала модуль сдвига имеет свое значение. Величина его определяется экспериментально при кручении образцов в виде стержней круглого поперечного сечения. При этом угол закручивания φ , рад, или угол поворота одного сечения относительно другого определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}, \quad (3)$$

где T – крутящий момент, Н·мм;

l – расстояние между сечениями, мм;

I_p – полярный момент инерции для круглого поперечного сечения,

равный: $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Формула (3) справедлива только в области упругих деформаций, когда максимальные напряжения в поперечных сечениях стержня не превышают предела пропорциональности τ_p , т. е. $\tau_{\max} \leq \tau_p$.

При постоянной длине l и диаметре d образца модуль сдвига G , согласно (3), будет определяться только крутящим моментом T и углом закручивания φ .

$$G = \frac{Tl}{\varphi I_p}. \quad (4)$$

Таким образом, для определения модуля сдвига необходимо из опыта на кручение найти для известного крутящего момента T величину угла закручивания φ на определенной длине образца l круглого поперечного сечения.

Порядок выполнения работы

Виртуальная лабораторная установка состоит из станины, на которой расположены две опоры 2 и 3. Образец 4 жестко закреплен одним концом в неподвижной опоре 2, а другим концом соединен с валом подшипниковой опоры 3, на котором установлен рычаг 5 с подвесом 6 для грузов l (рис. 1).

Такая конструкция позволяет образцу диаметром d после приложения на подвес груза F испытывать только кручение. В двух сечениях образца, отстоящих одно от другого на расстоянии l закреплены две рамки 7, между которыми на расстоянии a от оси устанавливается индикатор часового типа 8.

Определение угла закручивания φ производится с использованием величины перемещения f , отображаемого индикатором по формуле:

$$\varphi = \arctg \frac{f}{a} \approx \frac{f}{a}. \quad (5)$$

Общий вид виртуальной установки представлен на рис. 2.

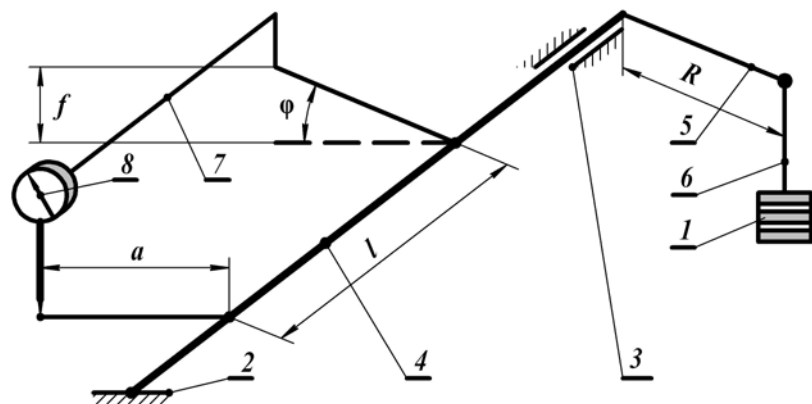


Рис. 1. Схема лабораторной установки

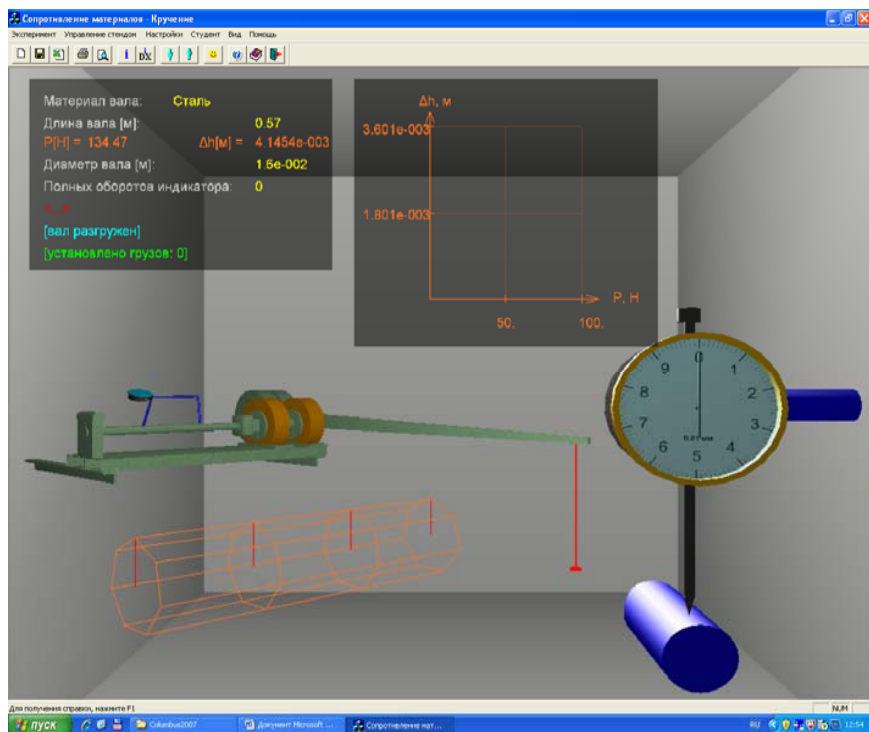


Рис. 2. Общий вид виртуальной лабораторной установки

Управление командами, выведенными на панели инструментов, представлено в табл. 1. Экспериментальные параметры:

l – длина расчетного участка и d – диаметр вала, мм;
 R – длина рычага и a – расстояние индикатора от оси вала, мм;
 $k_{и} = 0,01$ цена деления индикатора часового типа, мм.

Таблица 1

Управление командами, выведенными на панели инструментов

Панель инструментов	Команды
Новый эксперимент	1. Начало эксперимента
Настройки	2. Установить параметры эксперимента (рис. 3): – материал образца; – длина расчетного участка вала l , м; – диаметр вала d , м; – длина рычага R , м; – расстояние от индикатора до оси вала a , м; – вес одного грузика F , Н
Запустить стенд	3. Включить гидронасос – выполнение эксперимента
Опустить траверсу	4. Установить на подвес грузик весом F , Н
Остановить стенд	5. Выключить нагружение вала. Снять показание по шкале индикатора f и записать в табл. 2. Далее, выполняя пункты 4, 5 и 6 через каждые 10 Н довести ступенчато нагрузку до 50 Н
Поднять траверсу	6. Разгрузить вал
Остановить стенд	7. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

Обработка результатов испытаний

1. Определить экспериментально показатели для каждой ступени нагружения на основании полученных опытных данных (табл. 2):

– полярный момент вала, мм^4 :

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32};$$

– угол закручивания, рад.:

$$\varphi = \frac{k_n \cdot f}{a},$$

где f – соответствующей отсчет по шкале индикатора, мм;
 – крутящий момент, Н·мм:

$$T = R \cdot F,$$

где F – нагрузка соответствующей ступени нагружения, Н;
 – модуль упругости при сдвиге, МПа:

$$G = \frac{Tl}{\varphi I_p}.$$

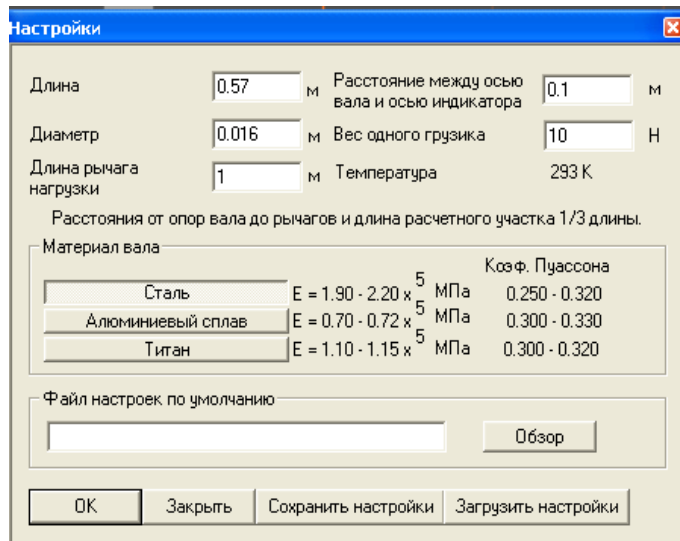


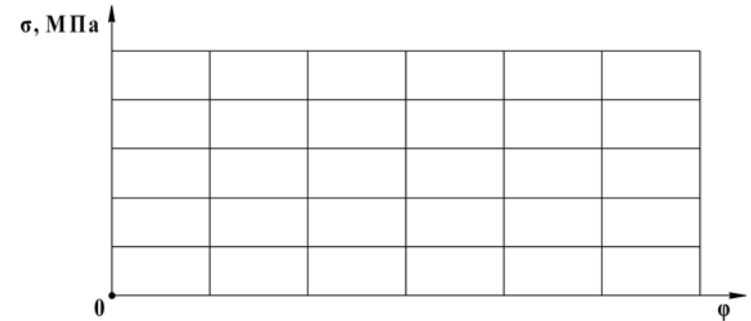
Рис. 3. Настройки параметров эксперимента

Таблица 2

Экспериментальные параметры

Показатели		Нагрузка F , Н					Среднее значение
		10	20	30	40	50	
Показания индикатора, мм	f						–
Угол закручивания, рад.	φ						–
Крутящий момент, Н·мм	T						–
Модуль сдвига, МПа	G						

2. Построить график $T = f(\varphi)$ и убедиться в его линейности.



Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Гука при сдвиге.
2. Что такое угол сдвига?
3. Что такое угол закручивания?
4. Как найти жесткость сечения бруса при кручении?
5. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого бруса при кручении? Чему они равны и как распределяются по сечению?
6. Какая связь между величинами μ , E и G ?
7. Как разрушаются при кручении стальные, чугунные и деревянные брусья круглого поперечного сечения? Чем объяснить такой характер их разрушения?

Темы для УИРС

1. Диаграммы $T = f(\varphi)$ для круглых образцов из чугуна, дерева и стали.
2. Определение влияния «наклепа» на модуль сдвига стали.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОСОГО ИЗГИБА

Цель работы: экспериментально и теоретически определить перемещения консольной балки при косом изгибе, положение нейтральной оси; сравнить величины наибольших напряжений и перемещений конечного сечения при косом и прямом изгибах.

Теоретическое обоснование

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором след плоскости изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения. При расчетах на прочность и жесткость косоугольный изгиб приводится к двум изгибам в главных центральных плоскостях инерции бруса. Рассмотрим консольную балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную силой F , линия действия которой составляет с главной центральной осью z угол α_F . Пускай в поперечном сечении балки на расстоянии x от крайнего левого сечения действует изгибающий момент равный (рис. 1):

$$M = -F \cdot x. \quad (1)$$

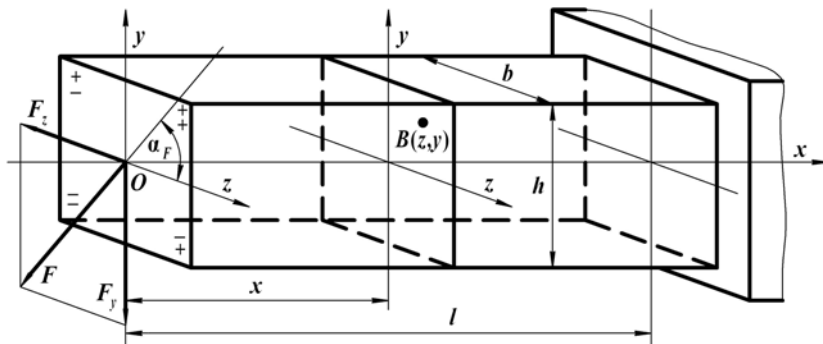


Рис. 1. Консольная балка

Спроектируем действующую на балку внешнюю силу F на главные центральные плоскости xOz и xOy . Получим соответственно:

$$F_y = F \sin \alpha_F, \quad (2)$$

$$F_z = F \cos \alpha_F. \quad (3)$$

В поперечном сечении балки на расстоянии x от крайнего левого сечения будут действовать изгибающие моменты относительно осей z и y :

$$M_z = -F_y x = -F \sin \alpha_F x = M \sin \alpha, \quad (4)$$

$$M_y = -F_z x = -F \cos \alpha_F x = M \cos \alpha. \quad (5)$$

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки согласно принципу независимости действия сил определяется как алгебраическая сумма напряжений от изгибающих моментов M_z и M_y относительно главных центральных осей инерции:

$$\sigma = \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y}, \quad \sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z. \quad (6)$$

При расчете нормальных напряжений по формуле (6) все величины подставляются в правую часть по модулю, а знаки перед каждым из двух слагаемых ставятся с учетом растяжения или сжатия в рассматриваемой точке, обусловленного соответствующим изгибающим моментом: растяжение – «+», сжатие – «-».

Так, для показанной на рис. 1 схемы нагружения балки, продольные волокна, расположенные выше оси z , как видно из направления действия момента M_z испытывают растяжение, ниже оси z – сжатие. Продольные волокна, расположенные справа от оси y , как видно из направления действия момента M_y испытывают растяжение, слева от оси y – сжатие. Тогда напряжение в точке $B(z, y)$, принадлежащей первому квадранту поперечного сечения балки, можно найти по формуле (6) поставив перед каждым слагаемым в правой части знак «+»:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (7)$$

Из формулы (7) видно также, что нормальные напряжения в некоторых точках поперечного сечения балки, испытывающей косоугольный изгиб,

изгиб, равны нулю. Эти точки располагаются на прямой линии, проходящей через начало координат (центр тяжести), называемой **нейтральной линией**. Приравнивая выражение (7) к нулю, получаем уравнение нейтральной линии в виде:

$$y = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} z. \quad (8)$$

Поскольку нейтральная линия проходит через начало координат, то ее уравнение удобно представлять выражением, разделив левую и правую часть уравнения (8) на величину z :

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y}, \quad (9)$$

где β – угол, который составляет нейтральная линия с главной центральной осью инерции z (рис. 2).

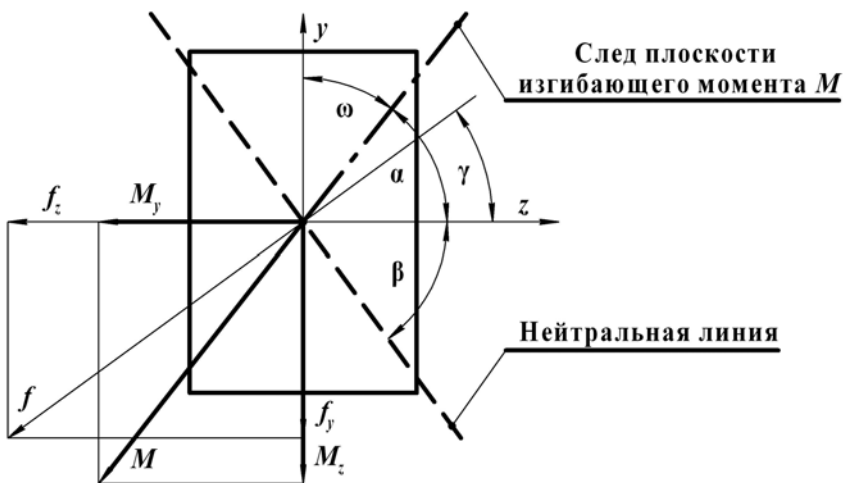


Рис. 2. Изгибающий момент M и перемещение концевого поперечного сечения балки f

Нейтральная линия в поперечном сечении балки при косом изгибе **не перпендикулярна** следу полного изгибающего момента. Она отклоняется от перпендикуляра к главной центральной оси инерции сечения, относительно которой момент инерции минимальный. По мере удаления точки от нейтральной линии нормальное напряже-

ние в ней линейно возрастает. Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной линии по разные от нее стороны. Причем в одной опасной точке возникает наибольшее растягивающее напряжение σ_{\max} , а в другой наибольшее сжимающее напряжение σ_{\min} .

При косом изгибе перемещение (прогиб) поперечного сечения f определяется как геометрическая сумма перемещений (прогибов) в главных центральных плоскостях инерции f_z и f_y , найденных теми же методами, что и при прямом изгибе. Используя метод начальных параметров, получим составляющие полного перемещения концевого поперечного сечения консольной балки (рис. 2):

$$f_z = -\frac{F \cos \alpha l^3}{3EI_y}; \quad f_y = -\frac{F \sin \alpha l^3}{3EI_z}. \quad (10)$$

Полное перемещение $f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}$ будет составлять угол γ с осью z . Разделив f_y на f_z из уравнений (10), получим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_y}{f_z} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_z}. \quad (11)$$

Перемножая уравнения (9) и (11) найдем:

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_z} = -1. \quad (12)$$

Таким образом, полное перемещение (прогиб) при косом изгибе перпендикулярно нейтральной линии, т. е. изгиб, происходит не в плоскости действия внешних сил, а в плоскости, перпендикулярной к нейтральной линии. Угол, который составляет нейтральная линия с главной центральной осью инерции z определяется из выражения $\beta = \gamma - 90^\circ$ (рис. 2).

Порядок выполнения работы

Лабораторная установка состоит из балки прямоугольного поперечного сечения I , жестко закрепляемой одним концом посредством цилиндра в заделке 2. На другом конце балки – подвес с гириями 3. На стойке штатива закреплены индикаторы часового типа для измерения перемещения: № 1 в направлении оси y 4 и № 2 – в направлении оси z

5 (рис. 3). Общий вид виртуальной лаборатории показан на рис. 4. Настройка параметров эксперимента приведена на рис. 5, а управление командами – на панели инструментов (табл. 1). Опыты проводятся для **разных углов** поворота оси z : (рис. 6), не изменяя при этом размеры стержня: l – длину, b – ширину, h – высоту поперечного сечения, мм.

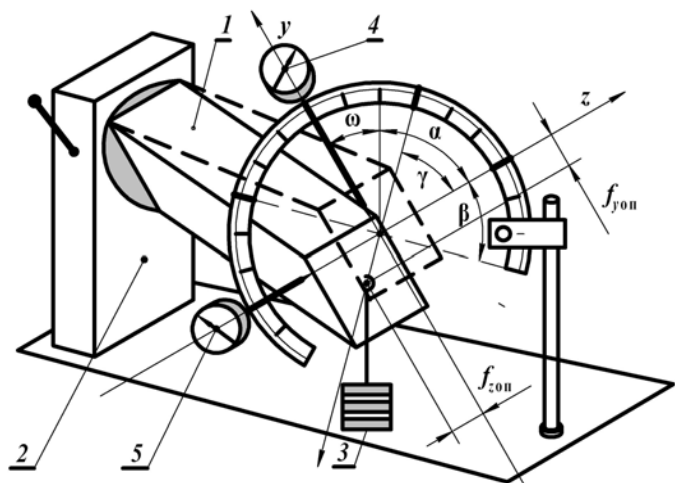


Рис. 3. Схема лабораторной установки

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов	Команды
Новый эксперимент	1. Начало эксперимента
Настройки	2. Установить параметры эксперимента (рис. 5): – длина стержня l , м; – ширина поперечного сечения b , м; – высота поперечного сечения h , м; – угол поворота оси y : $\omega = 90^\circ - \alpha$
Опустить траверсу	3. Последовательным нажатием кнопки «Опустить траверсу» нагрузить балку весом $F = 50$ Н. Снять показание по шкалам индикаторов n_x и n_y и записать в табл. 2
Поднять траверсу	4. Разгрузить балку – окончание эксперимента

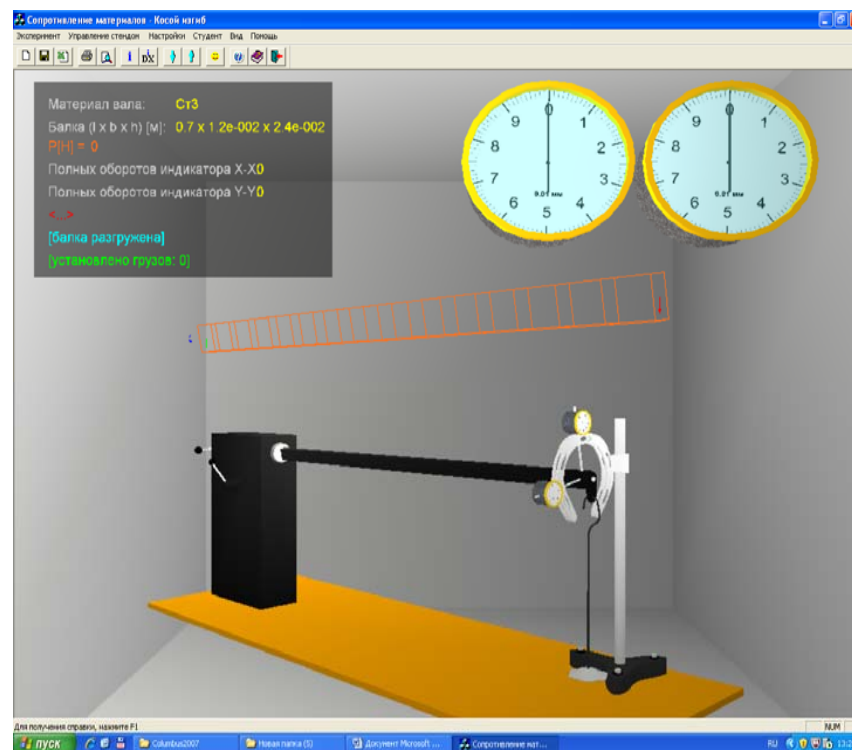


Рис. 4. Общий вид виртуальной лабораторной установки

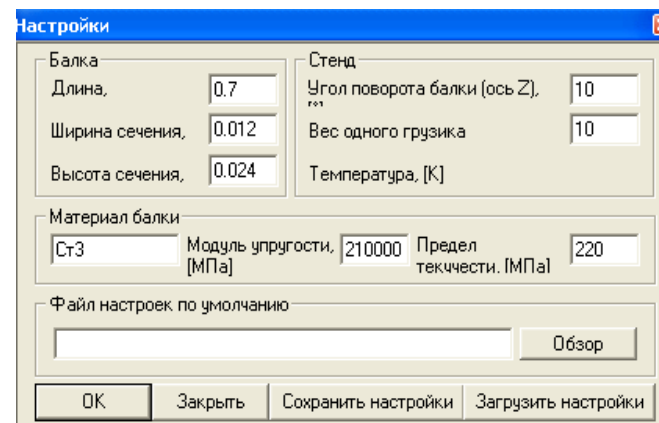


Рис. 5. Настройки параметров эксперимента

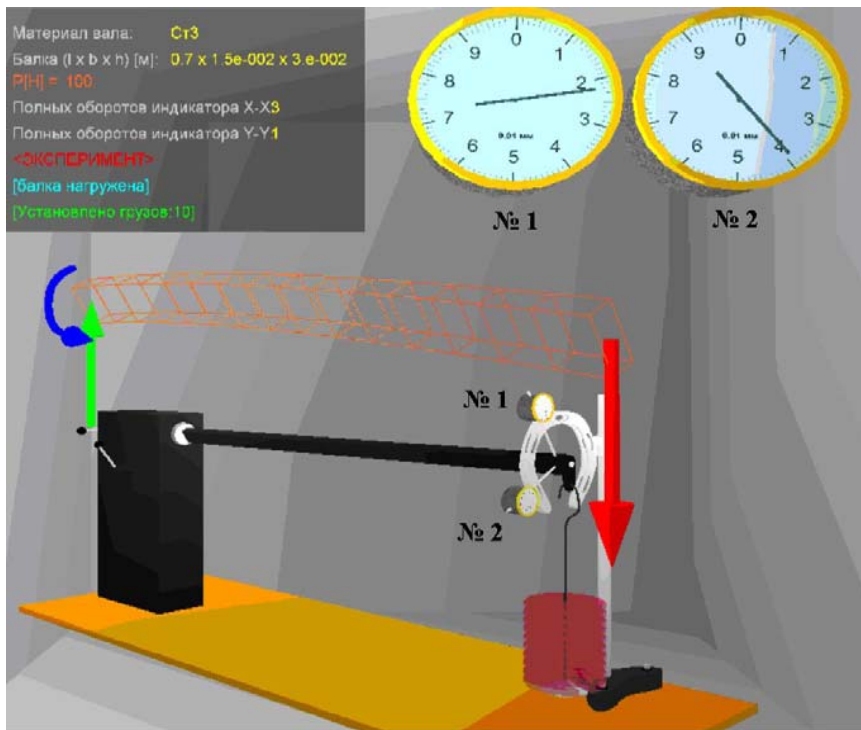


Рис. 6. Нагружение балки

Опыт повторить для углов поворота оси z : α° , 0° и 90° . При этом следует иметь в виду, что в данной работе установка оси z производится по углу поворота ω оси y : $\alpha = 90^\circ - \omega$. Прогобы балки по главным осям z и y записать в табл. 2.

Обработка результатов испытаний

1. На основании опытных данных, полученных при проведении эксперимента, определить и записать в табл. 2 параметры:

– расчетные углы:

$$\alpha = 90^\circ - \omega;$$

– моменты инерции сечения относительно центральных осей z и y , мм^4 ;

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12};$$

– составляющие прогиба свободного торца балки по главным осям z и y , мм:

$$f_{z\text{оп}} = k_{\text{и}} \cdot n_z, \quad f_{y\text{оп}} = k_{\text{и}} \cdot n_y;$$

где $k_{\text{и}} = 0,01$ – цена деления индикатора часового типа, мм;

– полный прогиб, мм:

$$f_{\text{оп}} = \sqrt{f_{z\text{оп}}^2 + f_{y\text{оп}}^2};$$

– значение угла $\gamma_{\text{оп}}$, между осью z и направлением вектора $f_{\text{оп}}$ (рис. 2):

$$\text{tg } \gamma_{\text{оп}} = \text{tg } \alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}; \quad \gamma = \text{---}^\circ;$$

– положение нейтральной линии – угол $\beta_{\text{оп}}$ при заданном α :

$$\beta_{\text{оп}} = \gamma_{\text{оп}} - 90^\circ.$$

Таблица 2

Опытные данные и теоретические параметры

Показатели	Углы оси z		
	α°	0°	90°
Опытные данные			
Показания индикатора вдоль оси z	n_z		
Показания индикатора вдоль оси y	n_y		
Перемещение вдоль оси z	$f_{z\text{оп}}$		
Перемещение вдоль оси y	$f_{y\text{оп}}$		
Полное перемещение (прогиб)	$f_{\text{оп}}$		
Угол полного перемещения с осью z	$\gamma_{\text{оп}}$		
Угол нейтральной линии с осью z	$\beta_{\text{оп}}$		
Теоретические параметры			
Перемещение вдоль главной центральной	f_z		
Перемещение вдоль главной центральной	f_y		
Полное перемещение (прогиб)	f		
Угол нейтральной линии с осью z	β		
Максимальное нормальное напряжение (7)	σ		

2. Рассчитать теоретически:

– составляющие прогиба свободного торца балки по главным осям z и y , мм:

$$f_z = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y} \cdot \cos \alpha, \quad f_y = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_z} \cdot \sin \alpha;$$

– полный прогиб, мм:

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2};$$

– положение нейтральной линии – угол β и сравнить его с экспериментальным значением:

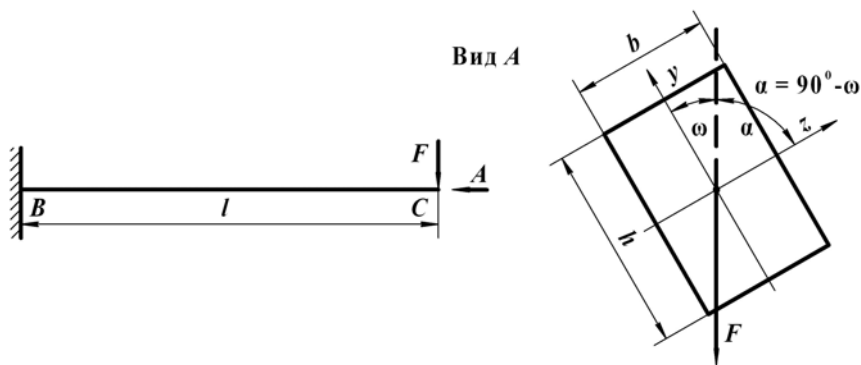
$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y}; \quad \beta = \text{---}^\circ.$$

– вычислить по формуле (7) максимальные нормальные напряжения σ в опасном сечении балки при косом ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) и прямых изгибах ($\alpha = 0^\circ$ и 90°); проанализировать полученные значения и сделать выводы.

– определить относительную ошибку $f_{\text{оп}}$ от f и сделать заключение:

$$\Delta f = \frac{f_{\text{оп}} - f}{f} \cdot 100\%.$$

3. Построить векторную схему перемещения свободного торца балки, и указать на ней l , b , h , α , β , ω и γ :



Контрольные вопросы

1. Какой изгиб называется косым?
2. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косой изгиб?
3. Сочетанием каких видов изгиба является косой изгиб?
4. По каким формулам определяют нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при косом изгибе? Как устанавливают их знаки?
5. Как найти положение нейтральной линии при косом изгибе?
6. Какие точки в сечении являются опасными при косом изгибе и как определить их положение?
7. Как определить величину и направление перемещения сечения балки?

Тема для УИРС

Расчет косого изгиба двухопорной балки.

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ СТАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Цель работы: экспериментально определить нормальные напряжения в прямоугольном поперечном сечении внецентренно растянутого стального стержня и сравнить их с напряжениями, вычисленными теоретически. Построить эпюры нормальных напряжений в сечении образца.

Теоретическое обоснование

Внецентренным растяжением называется такой вид сложного нагружения внецентренно приложенной продольной внешней нагрузкой, при которой в поперечных сечениях бруса одновременно действуют нормальная растягивающая или сжимающая сила и изгибающий момент. Этот вид нагружения получается тогда, когда равнодействующая внешних сил смещена относительно центра тяжести поперечного сечения и направлена параллельно оси бруса.

Если на брус в произвольном поперечном сечении действует сила F в точке B , являющаяся равнодействующей всех внешних сил, то ее координаты z_F и y_F называются **эксцентриситетами** этой силы относительно главных центральных осей сечения z и y (рис. 1, а). Точка B приложения силы F называется **полюсом** или центром давления.

Приложим в центре тяжести верхнего поперечного сечения O две равные и противоположно направленные силы F' и F'' , равные силе F . Тогда сила F , действующая в точке B , и сила F'' , действующая в точке O и направленная вниз, составляют пару сил с моментом $M = F \cdot h = F'' \cdot h$. Этот момент является постоянным по всей длине бруса, но не действует ни в одной из двух главных плоскостей. Поэтому его можно разложить на два момента относительно осей z и y (рис. 1, б).

Тогда получим:

$$M_z = F \cdot y_F, \quad M_y = F \cdot z_F. \quad (1)$$

Оставшаяся сила $F' = F$, действующая по оси бруса, является центральной и растягивающей. Таким образом, внецентренное растяжение в любом поперечном сечении приводится к центральному растяжению от нормальной силы F и изгибу в плоскостях xz и xy от моментов M_z и M_y . Нормальное напряжение σ в произвольной точке C с координатами z и y , на основании принципа независимости действия сил, равно сумме напряжений от нормальной силы и изгибающих моментов (рис. 1, б):

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F \cdot y}{I_z} + \frac{F \cdot z_F \cdot z}{I_y}, \quad (2)$$

где A – площадь поперечного сечения бруса, мм²;

I_z и I_y – осевые моменты инерции относительно осей соответственно y и z ;

W_z и W_y – осевые моменты сопротивления также относительно осей y и z .

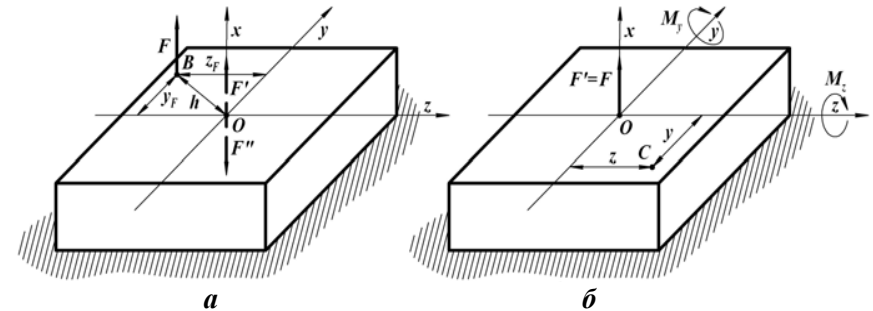


Рис. 1. Схема внецентренного растяжения

Из формулы (2) следует, что нормальные напряжения в сечении изменяются по линейному закону, а максимальные напряжения будут возникать в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Для отыскания таких точек необходимо найти положение нейтральной линии. Обозначив координаты нейтральной линии через z_0 и y_0 , при равенстве нулю напряжений на ней из (2) получим:

$$F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y}{I_z} + \frac{z_F \cdot z}{I_y} \right) = 0.$$

$$\frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F \cdot y}{I_z} + \frac{F \cdot z_F \cdot z}{I_y} = 0. \quad (3)$$

Так как $F \neq 0$, то уравнение нейтральной линии будет:

$$\frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y}{I_z} + \frac{z_F \cdot z}{I_y} = 0 \text{ или } -\frac{Ay_F \cdot y}{I_z} - \frac{Az_F \cdot z}{I_y} = 1. \quad (4)$$

Положение нейтральной линии на поперечном сечении удобно находить через отрезки z_0 и y_0 , отсекаемые ею на осях z и y , определить которые можно, преобразовав уравнение (4) к виду уравнения в отрезках:

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

Тогда:

$$\frac{y}{\frac{I_z}{Ay_F}} + \frac{z}{\frac{I_y}{Az_F}} = 1; \quad (5)$$

где $\frac{I_z}{Ay_F}$ и $\frac{I_y}{Az_F}$ – отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y и z .

Порядок выполнения работы

Внецентренное растяжение стержня прямоугольного поперечного сечения имитирует виртуальная лабораторная установка на специальном стенде (рис. 2). Она позволяет осуществлять пошаговое нагружение и разгрузку стержня с контролем нагрузки динамометром и контролем деформации по двум рычажным тензомерам. Так как эксцентриситет $z_F = 0$, то в поперечном сечении стержня возникают 2 внутренних силовых фактора: нормальная сила $N = F$ и изгибающий момент $M = F \cdot y_F$, где y_F – эксцентриситет приложения силы по отношению к центру тяжести сечения на оси y . Нормальные напряжения от двух этих факторов на разных краях поперечного сечения различаются по величине и по знаку. В эксперименте достаточно определить нормальные напряжения в двух точках 1 и 2 по величинам соответствующих абсолютных деформаций стержня.

Для этого, применяется метод тензометрии **рычажными тензомерами**. Тензомер представляет собой жесткую рамку, соприка-

сающуюся с образцом в одной точке неподвижным острием, а в другой – с помощью поворачивающейся призмы, соединенной с качающимся рычагом. Рычаг в свою очередь соединен со стрелкой, указывающей отсчет по шкале. Неподвижное острие и острие поворачивающейся призмы прижимаются скобой с винтом к деформируемому стержню.

При деформации расстояние между точками изменяется, что и фиксирует стрелка тензомера. База прибора – расстояние между его подвижным и неподвижным остриями $L = 20$ мм (табл. 1). Настройки параметров приведены на рис. 3.

Установка – машина разрывная типа ИР 5047-50.

Стержень прямоугольного поперечного сечения:

b – ширина сечения, мм;

h – высота сечения, мм;

$k_p = 0,001$ – цена деления шкалы рычажного тензомера, мм.

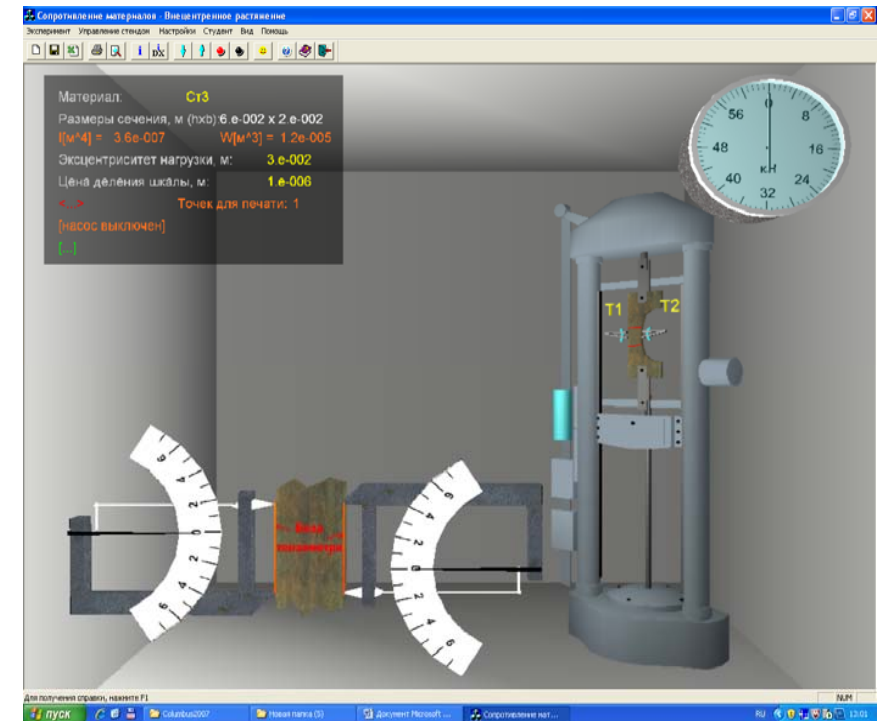


Рис. 2. Общий вид виртуальной лабораторной установки

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов	Команды
Новый эксперимент	1. Начало эксперимента
Настройки	2. Установить параметры эксперимента (рис. 3): – материал образца из предлагаемого перечня; – размеры поперечного сечения b и h , м; – эксцентриситет нагрузки, м
Запустить стенд	3. Включить гидронасос – выполнение эксперимента
Опустить траверсу	4. Довести стрелку динамометра до отметки 20 кН
Остановить стенд	5. Выключить нагружение образца. Записать показания рычажных тензометров в графы N_1 и N_2 табл. 2
Поднять траверсу	6. Разгрузить балку
Остановить стенд	7. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

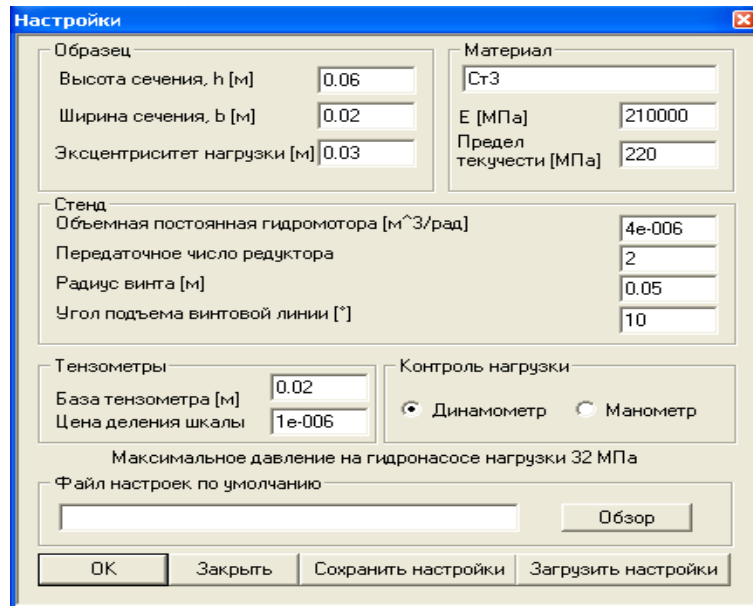


Рис. 3. Настройки параметров эксперимента

Таблица.2

Исходные данные и экспериментальные показатели

Показатели	Рычажные тензометры	
	1	2
Расчетная нагрузка F , кН		
Показания рычажных тензометров N_i , ед.		
Нормальные напряжения σ , МПа		
Координаты нейтральной линии, мм		

Обработка результатов испытаний

1. На основании опытных данных, полученных при внецентренном растяжении стержня прямоугольного сечения, определить и записать в табл. 2:

– нормальные напряжения в исследуемом поперечном сечении, МПа:

$$\sigma_1 = E \cdot \frac{k_p \cdot N_1}{L}, \quad \sigma_2 = -E \cdot \frac{k_p \cdot N_2}{L};$$

– координату нейтральной линии y_0 , мм, определяемую из соотношений:

$$-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{y}{2} - y_0}{\frac{y}{2} + y_0}, \quad y_0 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

2. Рассчитать теоретически:

– площадь поперечного сечения, мм²:

$$A = b \times h;$$

– осевой момент инерции сечения, мм⁴ и осевой момент сопротивления, мм³:

$$I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$$

– изгибающий момент в исследуемом поперечном сечении образца, Н·мм:

$$M_z = F \cdot y_F;$$

– нормальное напряжение в центре тяжести сечения образца, МПа:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A};$$

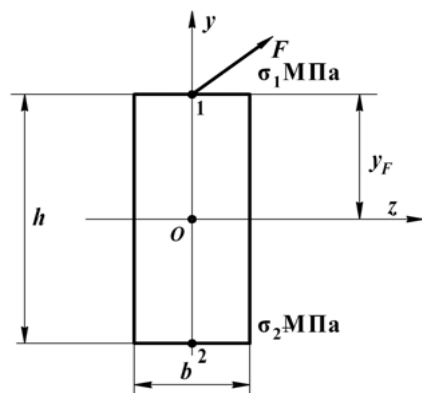
– нормальные напряжения в расчетных точках сечения образца, МПа:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_2 = \frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z};$$

– координаты нейтральной линии, мм: $z_0 = 0$;

$$y_0 = -\frac{I_z}{A \cdot y_F}.$$

3. Построить эпюры максимальных нормальных напряжений в поперечном сечении образца:



Примечание. Сила F на схеме перпендикулярна плоскости zOy .

Контрольные вопросы

1. При каком условии в поперечных сечениях бруса возникает внецентренное растяжение?
2. Как называются координаты точки равнодействующей внешних сил?
3. Чему равно суммарное напряжение в любой точке сечения бруса?
4. Зависит ли положение нейтральной линии от величины и знака силы?
5. Как располагаются нейтральная линия и полюс относительно центра тяжести поперечного сечения?

Тема для УИРС

Нормальные напряжения при внецентренном растяжении.

Лабораторная работа № 9

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ СТАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Цель работы: экспериментально определить нормальные напряжения в круглом поперечном сечении внецентренно сжатого стержня и сравнить их с напряжениями, вычисленными теоретически. Построить эпюры нормальных напряжений в сечении образца.

Теоретическое обоснование

Внецентренным сжатием называется такой вид сложного нагружения внецентренно приложенной продольной внешней нагрузкой, при которой в поперечных сечениях бруса одновременно действуют нормальная сжимающая сила и изгибающий момент. Этот вид нагружения получается тогда, когда равнодействующая внешних сил смещена относительно центра тяжести поперечного сечения в точку B и направлена параллельно оси бруса (рис. 1, а). Перенеся силу F в центр тяжести сечения O , получим центральную сжимающую силу F и два момента относительно осей z и y (рис. 1, б):

$$M_z = F \cdot y_F, \quad M_y = F \cdot z_F. \quad (1)$$

Подробное объяснение такому переносу приведено в ВЛР № 8.

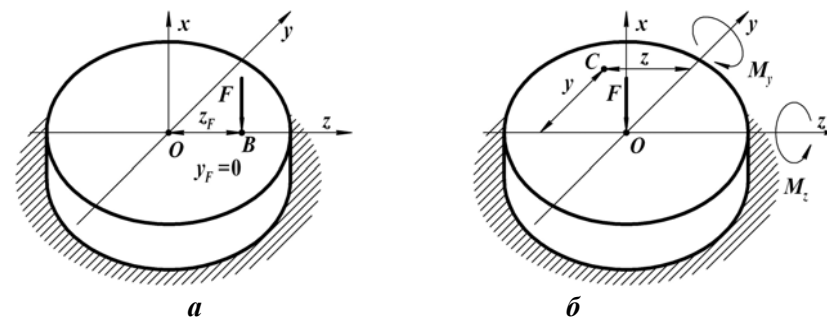


Рис. 1. Схема внецентренного сжатия

Полученные зависимости справедливы в условиях отсутствия продольного изгиба, т. е. когда опасным состоянием является наступление текучести, а не потеря устойчивости. Нормальное напряжение σ в произвольной точке C с координатами z и y , на основании принципа независимости действия сил, равно сумме напряжений от нормальной силы и изгибающих моментов:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F \cdot y}{I_z} + \frac{F \cdot z_F \cdot z}{I_y}, \quad (2)$$

где A – площадь поперечного сечения бруса, мм²;

I_z и I_y – осевые моменты инерции относительно осей соответственно y и z ;

W_z и W_y – осевые моменты сопротивления также относительно осей y и z .

Для круглого поперечного сечения любая центральная ось является главной и ось z или y всегда можно провести через полюс B приложения силы F , тогда $M_z = 0$.

Тогда:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

Решение задач предполагает определение неизвестной величины диаметра d стержня. В формулу (3) все величины подставляются со своими знаками: растягивающая сила F – со знаком плюс, сжимающая – со знаком минус, допустимое напряжение $[\sigma]$ и эксцентриситет z_F – также со своими соответствующими знаками. Преобразовав уравнение (3) и подставляя параметры F , z_F , d и $[\sigma]$ получим:

$$\frac{F \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot d^2} + \frac{F \cdot z_F \cdot 10^6 \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = [\sigma]. \quad (4)$$

Если по условию задачи z_F кратно диаметру d , то выражение (4) упрощается в уравнение 2-го порядка относительно неизвестной величины d и решение его не вызывает затруднений. Если нет, то после преобразований получим уравнение 3-го порядка вида $d^3 + a \cdot d + b = 0$:

$$\pi \cdot [\sigma] \cdot d^3 - 4 \cdot 10^3 \cdot F \cdot d - 32 \cdot 10^6 \cdot F \cdot z_F = 0$$

$$\text{или} \quad d^3 - \frac{1,274 \cdot 10^3}{[\sigma]} F \cdot d - \frac{10,191 \cdot 10^6}{[\sigma]} F \cdot z_F = 0; \quad (5)$$

где $a = -\frac{1,274 \cdot 10^3}{[\sigma]} F$, $b = -\frac{10,191 \cdot 10^6}{[\sigma]} F \cdot z_F$ – параметры уравнения

3-го порядка.

Уравнение (5) вида $d^3 + a \cdot d + b = 0$ относительно неизвестной величины d может решаться тремя способами:

1. Первоначально в исходных уравнениях (3) не учитывается нормальная сжимающая сила F , так как ее влияние, как правило, незначительно. Если в результате решения условие прочности (5) не удовлетворяется, то искомый диаметр d определяется методом подбора, последовательно увеличивая его типоразмер по ГОСТ 6636–69. Недостатком такого способа, при всей его простоте является потеря идеологии решения задач внецентренного растяжения и сжатия.

2. Уравнение вида $d^3 + a \cdot d + b = 0$ решается методом Кардана. Его применение регламентирует детерминант $D = (b/2)^2 + (a/3)^3$, определяющий наличие действительных решений и их количество: $D > 0$ – одно решение, $D < 0$ – три решения, $D = 0$ – одно решение при $b/2 = a/3 = 0$.

Применительно к задачам механики материалов $D > 0$ и имеется 1 решение:

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(-\frac{10,191 \cdot 10^6}{2 \cdot [\sigma]} F \cdot z_F\right)^2 + \left(-\frac{1,274 \cdot 10^3}{3 \cdot [\sigma]} F\right)^3 =$$

$$= +77 \cdot 10^6 \frac{F^3}{[\sigma]^3} \left(339 \cdot 10^3 \frac{z_F^2 \cdot [\sigma]}{F} - 1\right) > 0.$$

Тогда:

$$d = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \quad (6)$$

3. Как видно из (6) влияние коэффициента a , определяемого нормальной силой F , на порядок ниже коэффициента b и ничтожно мало. Следовательно предпочтителен 3-й способ. Его сущность состоит в том, что в уравнении (6) используется только 1-е слагаемое, так как из-за малости коэффициента a 2-й кубический корень практически равен нулю. Максимальная ошибка $\Delta \leq 2,5\%$:

$$d = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}. \quad (7)$$

Порядок выполнения работы

Внецентренное сжатие стержня цилиндрической формы имитирует виртуальная лабораторная установка на прессе типа ПГ-100. Так как эксцентриситет $z_F = 0$, то в поперечном сечении стержня возникают два внутренних силовых фактора: нормальная сила $N = F$ и изгибающий момент $M = F \cdot y_F$, где y_F – эксцентриситет приложения силы по отношению к центру тяжести сечения. Нормальные напряжения от двух этих факторов на разных краях поперечного сечения различаются по величине и по знаку. В эксперименте определяются нормальные напряжения в 4-х наиболее удаленных от центра точках (рис. 2) и настройки параметров эксперимента определяются в соответствии с рис. 3. Две точки 1 и 3 находятся в главной плоскости инерции, в которой действует изгибающий момент, а две другие 2 и 4 – в главной плоскости, перпендикулярной первой. Измерение возникающих деформаций производится методом тензометрии. Для этого в указанных точках наклеены тензодатчики с базой $L = 20$ мм.

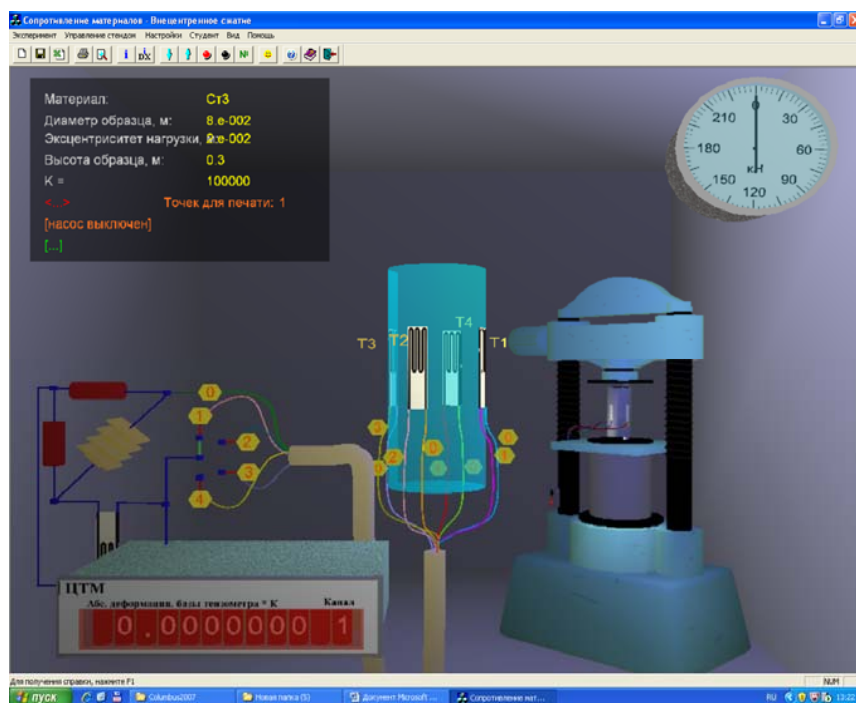


Рис. 2. Общий вид виртуальной лабораторной установки

Усилие от пресса передается через шарики, расположенные в точках половины радиуса поперечного сечения, и направлено параллельно оси стержня. Величины абсолютных деформаций баз тензодатчиков ΔL в метрах, увеличенные в 10^5 раз, показываются в окне цифрового индикатора. Для получения результатов в миллиметрах следует увеличить величину отсчета в 1000 раз. Имеется возможность последовательного просмотра показаний каждого тензодатчика. Относительные деформации ε рассчитываются делением абсолютных деформаций ΔL на длину базы L : $\varepsilon = \Delta L / L$. При этом, искомые напряжения σ связаны с относительными деформациями законом Гука: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, где E – модуль Юнга.

Управление командами на панели инструментов приведено в табл. 1.

Установка – пресс типа ПГ-100. Стержень круглого поперечного сечения:

$d = 80$ – диаметр стержня, мм;

$h = 300$ – высота стержня, мм;

$z_F = 20$ – эксцентриситет приложения сжимающей нагрузки, мм;

$k_T = 10^5$ – увеличение прибором деформации базы тензодатчика, мм.

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов	Команды
Новый эксперимент	1. Начало эксперимента
Настройки	2. Установить параметры эксперимента (рис. 3): – материал образца из предлагаемого перечня; – размеры поперечного сечения d и h , м; – эксцентриситет нагрузки, м
Запустить стенд	3. Включить гидронасос – выполнение эксперимента
Опустить траверсу	4. Довести стрелку динамометра до отметки 150 кН
Остановить стенд	5. Выключить нагрузку образца
Переключатель каналов	6. Записать показания деформаций тензодатчиков в графы N_1 , N_2 , N_3 и N_4 табл. 2
Поднять траверсу	7. Разгрузить балку
Остановить стенд	8. Выключить гидронасос – окончание эксперимента

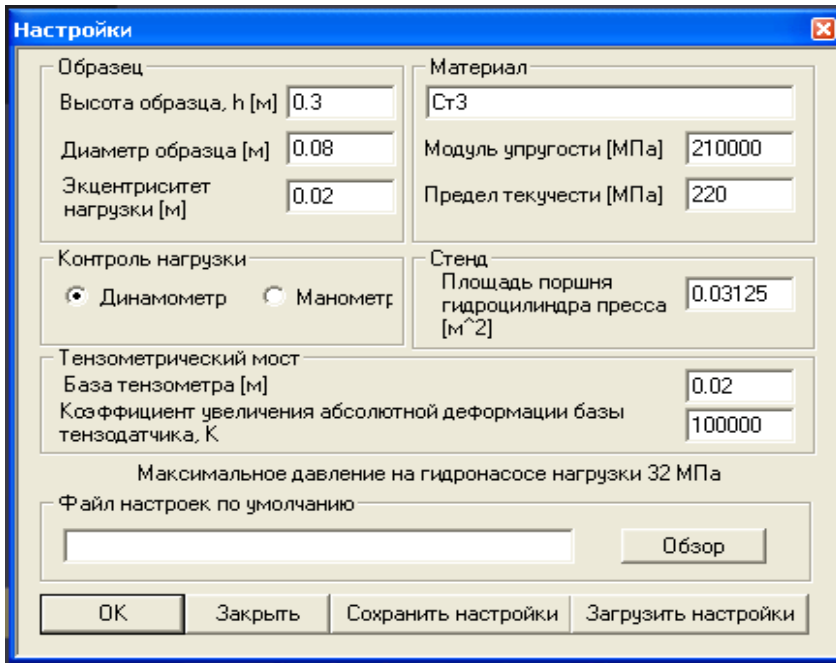


Рис. 3. Настройки параметров эксперимента

Таблица 2

Опытные данные и расчетные показатели

Показатели	Тензодатчики			
	1	2	3	4
Расчетная нагрузка F , кН				
Показания тензодатчиков N_i , ед.				
Нормальные напряжения σ , МПа				
Координаты нейтральной линии, мм				

Обработка результатов испытаний

1. На основании опытных данных, полученных при внецентренном сжатии стержня круглого поперечного сечения определить и записать в табл. 2:

– нормальные напряжения, МПа:

$$\sigma_i = E \cdot \frac{N_i}{L \cdot k_T};$$

$\sigma_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ МПа; $\sigma_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ МПа; $\sigma_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ МПа; $\sigma_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ МПа;
– координату нейтральной линии y_0 , мм, определяемую из соотношений:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\frac{y}{2} - y_0}{\frac{y}{2} + y_0}, \quad y_0 = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

2. Рассчитать теоретически значения нормальных напряжений и координаты нейтральной линии:

– площадь поперечного сечения, мм²:

$$A = \pi \cdot d^2 / 4;$$

– осевой момент инерции сечения, мм⁴ и осевой момент сопротивления, мм³:

$$I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$$

– изгибающий момент в исследуемом поперечном сечении образца, Н·мм:

$$M_z = F \cdot y_F.$$

– нормальное напряжение в центре тяжести сечения образца, МПа:

$$\sigma_0 = \sigma_2 = \sigma_4 = -\frac{F}{A};$$

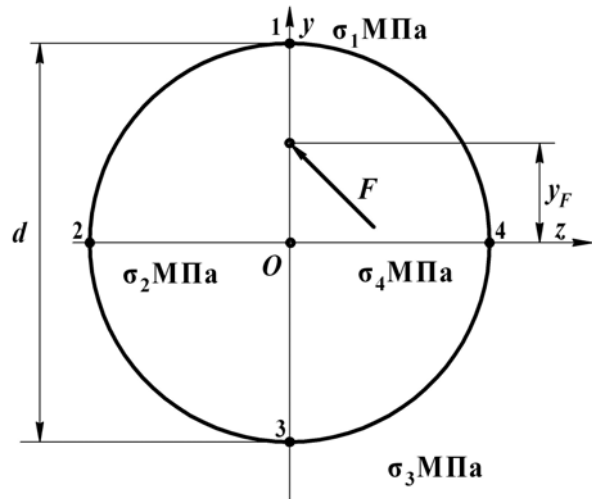
– нормальные напряжения в расчетных точках сечения образца, МПа:

$$\sigma_1 = -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_3 = -\frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z};$$

– координаты нейтральной линии, мм: $z_0 = 0$,

$$y_0 = -\frac{I_z}{A \cdot y_F}.$$

3. Построить эпюры максимальных нормальных напряжений в поперечном сечении образца:



Примечание. Сила F на схеме перпендикулярна плоскости zOy .

Контрольные вопросы

1. Чем определяется внецентренное сжатие стержня?
2. Возможно ли внецентренное сжатие в условиях продольного изгиба?
3. Проходит ли нейтральная линия через центр тяжести сечения?
4. Зависит ли положение нейтральной линии от величины и знака равнодействующей внешней нагрузки?
5. Может ли нейтральная линия находиться за пределами сечения?
6. Каковы особенности расположения нейтральной линии и полюса приложения внешней нагрузки?
7. Что называется ядром поперечного сечения?
8. Какими свойствами обладают точки ядра сечения, и как оно строится?
9. Сформулируйте правило определения ядра сечения.

Тема для УИРС

Нормальные напряжения в стержне круглого поперечного сечения при внецентренном сжатии.

Лабораторная работа № 10

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Цель работы: определить критическую силу и коэффициент приведения длины стержня большой гибкости при различных способах закрепления концов.

Теоретическое обоснование

Устойчивость – способность упругой системы сохранять под нагрузкой свою первоначальную форму равновесия. Если система этой способностью не обладает, то она называется **неустойчивой**, а ее состояние является неустойчивым. Например, если шарик находится на дне лунки (рис. 1, а), то его состояние устойчивое, а если шарик располагается на вершине выпуклости (рис. 1, б), то его состояние неустойчивое.



Рис. 1. Устойчивое (а) и неустойчивое (б) состояния системы

В реальных условиях эксплуатации конструкции всегда существуют какие-либо причины, из-за которых может произойти отклонение от исходного состояния равновесия (пусть даже самое незначительное). Следовательно, в неустойчивой системе всегда реализуется возможность перехода в новое состояние равновесия, т. е. происходит потеря устойчивости, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается значительными перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением конструкции.

Явление потери устойчивости для упругих тел можно наблюдать на целом ряде примеров. Наиболее простыми и распространенными случаями являются потеря устойчивости при центральном сжатии длинных (по сравнению с поперечными размерами) стержней, тонкостенных труб, прокатных профилей и т. д.

Проследим явление потери устойчивости стержня при центрально приложенной сжимающей силе F , которая постепенно возрастает (рис. 2, а). Пока сила F мала, стержень, выведенный из равновесия какой-либо незначительной кратковременно действующей силой Q (рис. 2, б), совершив, возможно, несколько колебаний (рис. 2, в), вернется в исходное прямолинейное состояние.

По мере роста силы F стержень будет медленнее и медленнее возвращаться в исходное состояние. И, наконец, при некотором значении силы F стержень, выведенный из равновесия силой Q , останется в искривленном состоянии (рис. 2, з). Значит, произошла потеря устойчивости. Наименьшая сжимающая сила при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой называется **критической силой** и обозначается F_k .

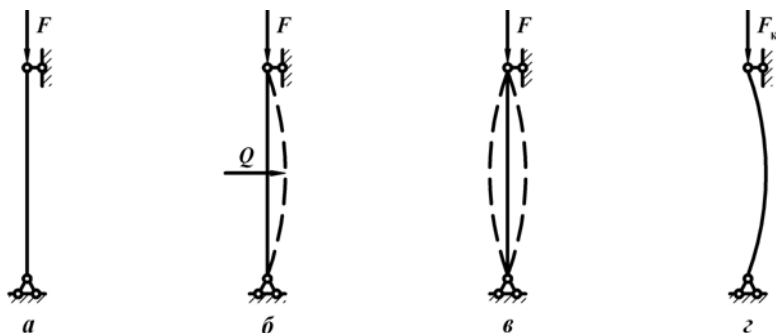


Рис. 2. Нагружение (а, б, в) и потеря устойчивости (з) сжатого стержня

Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня под действием осевой сжимающей нагрузки называется **продольным изгибом** [3]. В этом случае в сечениях стержня наряду с продольной силой действует и изгибающий момент, интенсивно возрастающий при увеличении нагрузки сверх критической. Он вызывает резкое увеличение напряжений и разрушение конструкции.

Впервые задачу о равновесии стержня, сжатого центральными силами поставил и решил Леонард Эйлер в середине XVIII века. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня имеет вид:

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (1)$$

где I_{\min} – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня; l – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины, величина которого зависит от способов закрепления концов стержня.

Коэффициент приведения длины μ показывает во сколько раз необходимо изменить длину l шарнирно закрепленного по концам стержня, чтобы его критическая сила была равна критической силе стержня при заданном способе закрепления и нагружения. μl – приведенная длина стержня. Для наиболее часто встречающихся на практике случаев закрепления и нагружения стержня коэффициент μ имеет значения, представленные на рис. 3.

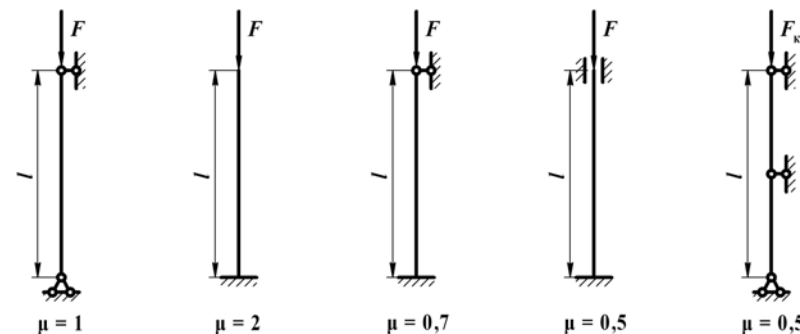


Рис. 3. Значения коэффициента приведения длины стержня

Напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при $F = F_k$, называются **критическими** и определяются по формуле:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (2)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня;

E – модуль продольной упругости материала стержня;

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – минимальный радиус инерции сечения;

$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ – гибкость стержня – безразмерная величина.

Формула Эйлера применима, когда критические напряжения в стержне σ_k не превышают предела пропорциональности σ_n , т. е.:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_n. \quad (3)$$

Отсюда наименьшая гибкость стержня, при которой еще применима формула Эйлера, называется **предельной гибкостью** и определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}. \quad (4)$$

Тогда формула Эйлера применима к расчету стержней, для которых гибкость больше или равна предельной гибкости $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$. Такие стержни называются **стержнями большой гибкости**.

Стержни, для которых $\lambda_{\text{пред}} > \lambda \geq \lambda_0$ относятся к **стержням средней гибкости**, где λ_0 – значение гибкости, при котором критические напряжения у стержней из пластичных материалов достигают предела текучести, из хрупких материалов – предела прочности. Расчет **стержней средней гибкости** ведется с использованием формулы Ясинского:

$$\sigma_k = a - b\lambda, \quad (5)$$

где a, b – опытные коэффициенты, зависящие от свойств материала и имеющие размерность напряжения.

Стержни, для которых $\lambda < \lambda_0$ относятся к **стержням малой гибкости**. Расчет таких стержней ведется на прочность, поскольку в этом случае потеря устойчивости практически не происходит.

На величину критической силы сжатого стержня большой гибкости существенное влияние оказывает коэффициент приведения длины. Для его определения опытным путем используются экспериментальные значения критической силы для стержня при различных способах закрепления концов. Пусть критические силы для одного и того же стержня с шарнирно закрепленными концами и с другими способами закрепления концов определяются соответственно по формулам:

$$F_{k1} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{(\mu_1 l)^2}; \quad (6)$$

$$F_{ki} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{(\mu_i l)^2}. \quad (7)$$

Разделив (6) на (7) получим:

$$\frac{F_{k1}}{F_{ki}} = \frac{\mu_i^2}{\mu_1^2}. \quad (8)$$

Подставляя в (8) $\mu_1 = 1$, получим формулу для определения коэффициента приведения длины стержня большой гибкости при разных способах закрепления относительно стержня с шарнирно закрепленными концами:

$$\mu_i = \sqrt{\frac{F_{k1}}{F_{ki}}}. \quad (9)$$

Порядок выполнения работы

Лабораторная установка включает разрывную машину типа ИР 5047-50 для приложения сжимающей нагрузки, нижнюю и верхнюю опоры для закрепления концов и испытываемый стержень прямоугольного сечения, который прогибается после увеличения нагрузки сверх критической F_k (рис. 4, а). Нагрузка стержня отражается на панели текущей информации (рис. 4, б). Общий вид виртуальной лабораторной установки показан на рис. 5. Опыты проводятся для разных схем крепления стержня, указанных на рис. 6, не изменяя при этом размеры стержня l, b и h :

– 530 мм – длина, 22 мм – ширина и 4 мм – высота поперечного сечения;



– $\sigma_n = 200$ – предел пропорциональности, МПа;

– $E = 2 \cdot 10^5$, МПа.

Управление командами на панели инструментов (табл. 1).

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов	Команды
Новый эксперимент 	1. Начало эксперимента
Настройки 	2. Установить параметры эксперимента (рис. 6): – длина стержня l , м; – ширина поперечного сечения b , м; – высота поперечного сечения h , м; – схема закрепления концов

Окончание табл. 1

Панель инструментов	Команды
	3. Включить гидронасос – выполнение эксперимента. Появляется характерный звук
	4. Довести нагрузку до критической отметки и зафиксировать величину критической силы F_k на панели текущей информации. При достижении критической силы F_k увеличение сжимающей нагрузки на графике автоматически прекращается
	5. Повторное нажатие этой кнопки приводит к потере устойчивости стержня с заметным прогибом
	6. Разгрузить балку
	7. Выключить гидронасос – окончание эксперимента. Исчезает характерный звук

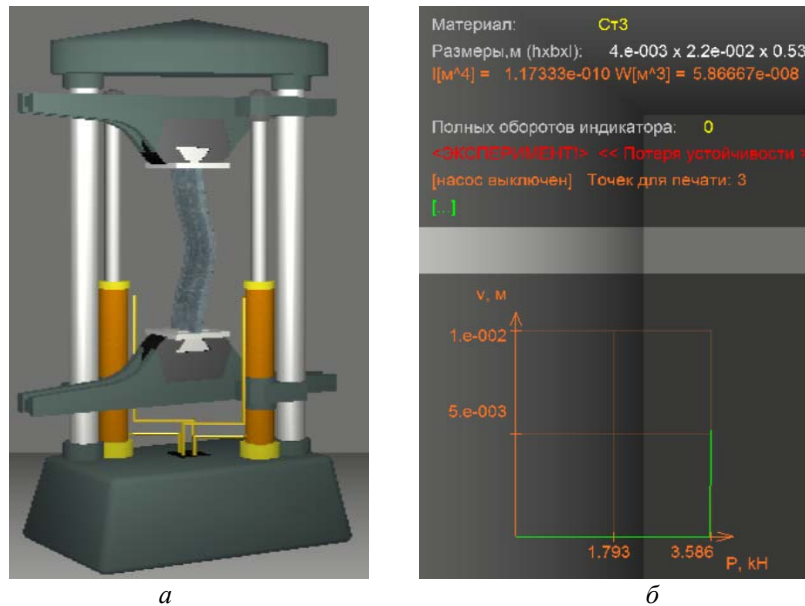


Рис. 4. Лабораторная установка:
а – схема сжатия стержня; б – панель текущей информации

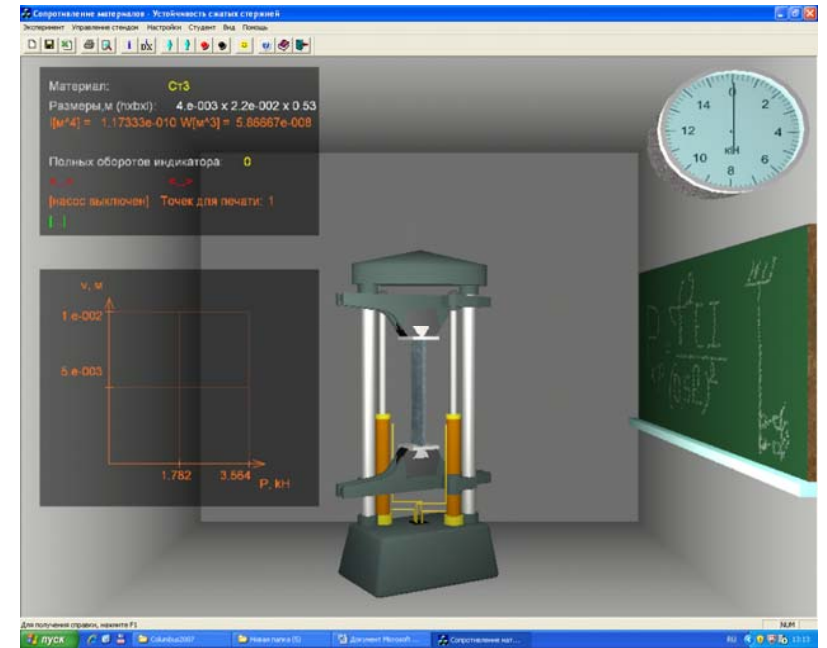


Рис. 5. Общий вид виртуальной лабораторной установки

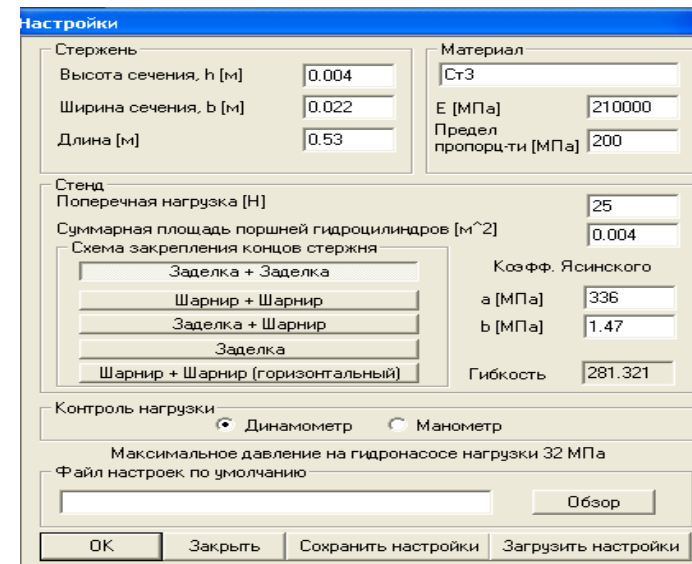


Рис. 6. Настройки параметров эксперимента

Опыт повторить при следующих способах крепления концов стержня: оба конца закреплены шарнирно; один – заделка, второй шарнир; оба конца – заделка.

Обработка результатов испытаний

1. Используя опытные значения критической силы F_k , определить экспериментальные значения коэффициентов приведения длины μ для каждого способа крепления концов стержня (9) и данные занести в табл. 2:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{F_1}{F_1}}; \quad \mu_{0,7} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}}; \quad \mu_{0,5} = \sqrt{\frac{F_1}{F_3}}.$$

2. Рассчитать теоретически:

- площадь поперечного сечения, мм²: $A = \pi \cdot d^2 / 4$;
- минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня, мм⁴ относительно оси, перпендикулярной к плоскости изгиба:

$$I_{\min} = \frac{b \cdot h^3}{12};$$

– предельную гибкость:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}},$$

– гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}},$$

– критическую силу, Н:

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

3. Сравнить экспериментальные и теоретические значения критических сил и коэффициентов приведения длины стержня и оценить расхождения.

Опытные данные и теоретические параметры

Способ крепления концов	Схема крепления стержня	Гибкость стержня, λ	Коэффициент приведения длины μ		Критическая сила F_k , Н	
			Т	Э	Т	Э
Оба конца – шарниры						
Заделка – шарнир						
Оба конца – заделка						

Примечание. Т – теоретически; Э – экспериментально.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность потери устойчивости сжатого стержня?
2. Что называется критической силой и критическим напряжением?
3. Что такое гибкость стержня?
4. Что такое предельная гибкость стержня?
5. Перечислите свойства стержней большой, средней и малой гибкости.
6. Какой вид имеет формула Эйлера для определения критической силы?
7. Каковы пределы применимости формулы Эйлера?
8. Запишите формулу Ясинского.
9. Что представляет собой и чему равен коэффициент приведения длины?
10. Как экспериментально определить коэффициент приведения длины?

Тема для УИРС

Расчет стержней средней гибкости по формулам Ясинского.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДАРНОЙ ВЯЗКОСТИ МАТЕРИАЛА

Цель работы: определить ударную вязкость материала при динамическом изгибе образца, имеющего в середине пролета надрез на глубину 2 мм.

Теоретическое обоснование

При действии ударных нагрузок материалы разрушаются иначе, чем при статическом нагружении. При этом, у пластичных материалов при ударной нагрузке появляется склонность к хрупкому разрушению. Испытания на удар дают возможность оценить сопротивляемость материалов действию ударных нагрузок и установить влияние различных факторов на их способность противостоять ударной нагрузке: форма и размеры образцов, температура и скорость удара. Наиболее распространены и стандартизированы испытания на изгиб образцов с надрезом. В соответствии с ГОСТ 9454–78 предусматривается 3 вида надрезов: *U*-образный – *KCU*, *V*-образный – *KCV* и образцы с трещиной – *KCT*, которые создаются в результате циклических переменных нагрузок.

Надрез ослабляет сечение и создает концентрацию напряжений, что способствует хрупкому разрушению материала, который находится в объемном напряженном состоянии. Вблизи надреза материал подвергается всестороннему растяжению, при котором затрудняется пластическая деформация. Наличие надреза в образце позволяет сконцентрировать энергию удара в небольшом объеме.

В результате ударного разрушения определяется количество работы W , затраченной на излом образца. В качестве характеристики, определяющей способность материала противостоять ударным нагрузкам, принимается удельная работа a , Дж/см², называемая ударной вязкостью:

$$a = \frac{W}{A}; \quad (1)$$

где $A = b \cdot h$ – площадь поперечного сечения образца до разрушения, мм²;

b – ширина и h – высота сечения в месте надреза, мм.

Порядок выполнения работы

Определение ударной вязкости материалов имитирует виртуальная лабораторная установка на специальном стенде. Она позволяет количественно оценить способность материалов сопротивляться ударным нагрузкам с контролем работы и графиком изменения кинетической энергии маятника копра. Имеется возможность регулировать начальную высоту подъема маятника и изменять геометрические и динамические характеристики маятника копра и образца (рис. 1).

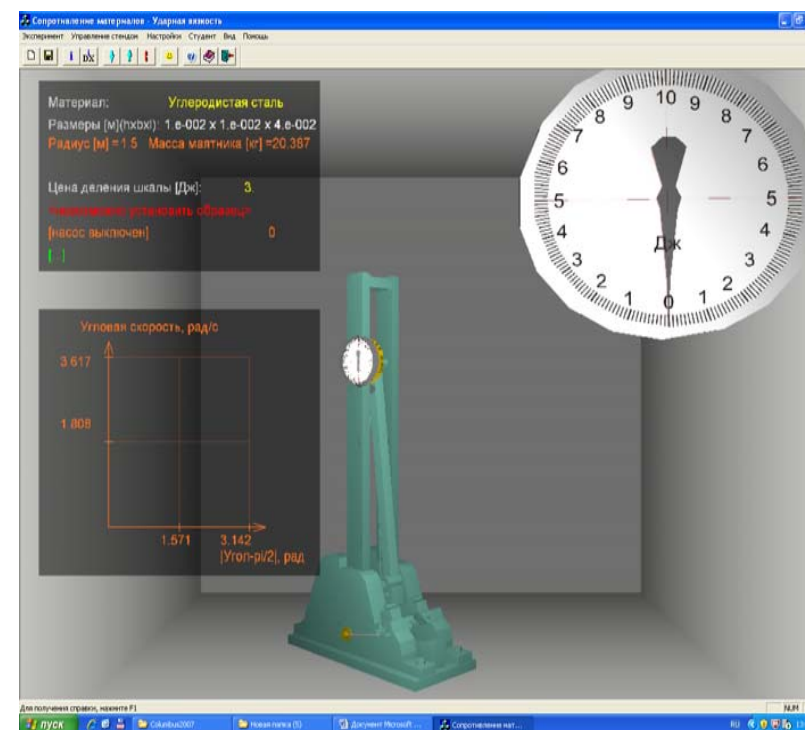


Рис. 1. Общий вид виртуальной лабораторной установки

При выполнении данной лабораторной работы настройки параметров эксперимента показаны на рис. 2, а процесс управления командами при проведении эксперимента представлен в табл. 1.

Маятник копра поднимается на высоту H_{\max} и фиксируется. В самой низкой точке траектории движения устанавливается образец надрезом в сторону движения. Отпущенный маятник ломает образец и взлетает на высоту H_{\min} . Тогда:

$$W = P (H_{\max} - H_{\min}); \quad (2)$$

где $P = mg$ – вес маятника, равный произведению массы m на ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Таблица 1

Управление командами на панели инструментов

Панель инструментов		Команды
Новый эксперимент		1. Начало эксперимента
Настройки		2. Установить параметры эксперимента (рис. 2) – материал образца из предлагаемого перечня; – размеры поперечного сечения b и h , м
Поднять маятник		3. Поднять и зафиксировать маятник Записать в табл. 2 отметку N_{\max} , которая указана на циферблате черной стрелкой
Красный образец		4. Установить образец для испытаний
Опустить маятник		5. Освободить маятник и разрушить образец. Записать в табл. 2 высоту N_{\min} , которая указана на циферблате красной стрелкой

Далее, повторить эксперимент для каждого образца материалов, выполняя команды 1–5, заполнить табл. 2.

Установка – Маятниковый копер-30.

Измерительное устройство маятника включает шкалу и 2 стрелки на оси маятника – черную и красную, фиксирующие непосредственно энергию маятника до и после удара. $\mathcal{E}_0 = 3,0 \text{ Дж}$ – цена деления шкалы измерителя энергии. При этом, для экономии места на шкале энергии пронумеровано число десятков Дж.

Параметры образца:

b – ширина сечения стержня, мм;

h – высота сечения стержня, мм;

$\Delta = 2$ – глубина надреза, мм;

$M = 20,387$ – масса маятника, кг.

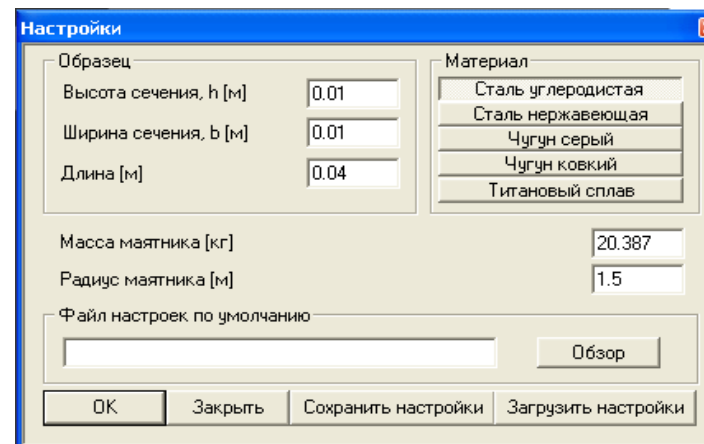


Рис. 2. Настройки параметров эксперимента

Обработка результатов испытаний

Определить экспериментально параметры ударной вязкости образцов из различных материалов и данные занести в табл. 2:

- расчетная площадь сечения, см^2 : $A = b \cdot (h - \Delta)$;
- работа, затрачиваемая на излом, Дж: $W = \mathcal{E}_0 \cdot \Delta N$;
- ударная вязкость, Дж/см²: $a = W / A$.

Таблица 2

Исходные данные и расчетные показатели

Материал	N_{\max}	N_{\min}	ΔN	W , Дж	a , Дж/см ²
Сталь углеродистая					
Сталь нержавеющая					
Чугун серый					
Чугун ковкий					
Титановый сплав					

Контрольные вопросы

1. Что определяют результаты испытаний материалов на ударную вязкость?
2. Какой ГОСТ определяет тип надреза и параметры испытаний?
3. Чему равна удельная работа на излом образца и как она измеряется?

Тема для УИРС

Определение ударной вязкости стали в зависимости от ее температуры.

ОСОБЕННОСТИ ОБРАБОТКИ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Правила приближенных вычислений и округления чисел

Числовые значения, получаемые в результате измерений физических величин и вычислений при проведении лабораторных работ, являются приближенными. Поэтому при выполнении расчетов необходимо соблюдать правила округления чисел и приближенных вычислений:

– если первая из отбрасываемых цифр есть 0, 1, 2, 3 или 4, то последняя сохраняемая цифра в приближенном числе остается без изменения (округление с недостатком);

– если за последней сохраняемой цифрой следует 5, 6, 7, 8 или 9, за которой следует одна или несколько значащих цифр, то к сохраняемой цифре прибавляется единица; при этом если последняя сохраняемая цифра 9, то она заменяется на 0 и на единицу увеличивается значение предшествующей цифры (округление с избытком);

– если за последней сохраняемой цифрой следует только цифра 5 или цифра 5 с последующими нулями, то округление производится так, чтобы последняя сохраняемая цифра имела четное значение, т. е. она остается неизменной, когда четная, и увеличивается на единицу, когда она нечетная.

Например, округлить число 28,872 до трех значащих цифр. Так как первая отбрасываемая цифра 7 больше 5, то третья цифра 8 увеличивается на единицу, приближенное число будет 28,9.

Округлить число 28,252 до трех значащих цифр. Так как первая отбрасываемая цифра 5, а за ней есть значащая цифра 2, то сохраняемая цифра 2 увеличивается на единицу и приближенное число будет 28,3.

Округлить число 0,8735 до трех значащих цифр. Так как последняя сохраняемая цифра 3 нечетная, то она увеличивается на единицу, приближенное число будет 0,874.

При округлении чисел больших 10 нули, не являющиеся верными цифрами, не пишутся, а выделяется отдельно множитель вида 10^n . Например, число 158965,7, округленное до трех значащих цифр, должно

записываться в виде $159 \cdot 10^3$ или $15,9 \cdot 10^4$ или $1,59 \cdot 10^5$. Если число 5230 имеет только две верные первые цифры, то его следует писать в виде $52 \cdot 10^2$ или $5,2 \cdot 10^3$. В числе 3500 четыре верные цифры, в числе $3,5 \cdot 10^3$ – только две верные цифры. При округлении приближенное значение может быть как больше, так и меньше точного числа.

Предельная абсолютная погрешность для приближенных чисел, независимо от способа их получения, принимается равной половине единицы разряда последней сохраненной цифры.

Приближенные числа обычно характеризуются количеством сохраненных разрядов после запятой, или количеством значащих цифр. Значащими цифрами называются все цифры, кроме нулей слева. Ноль считается значащей цифрой, только когда он стоит между другими значащими цифрами или стоит в конце числа и неизвестно, имеются ли единицы соответствующего разряда в данном числе.

Например, числа 453; 80,2; 0,0823; 0,250; 470 имеют три значащих цифры. Цифры в приближенном числе называются верными, если разность между точным числом и его приближенным значением не превышает половины единицы разряда последней цифры приближенного числа, в данном случае предельной абсолютной погрешности. Таким образом, все значащие числа являются верными.

При массовых вычислениях, когда не учитываются погрешности каждого отдельного результата, необходимо пользоваться следующими правилами, обеспечивающими получение окончательного результата со всеми верными знаками.

При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат необходимо округлить до наименьшего числа десятичных знаков, которое имеется в исходных данных. Числа, содержащие больше десятичных знаков, нужно предварительно округлить, сохранив один лишний десятичный знак по отношению к числу с наименьшим количеством десятичных знаков.

Например, найти сумму $28,4 + 32,844 + 0,452 + 2,768$. Так как первое слагаемое имеет только десятичные доли, то округляем остальные слагаемые до сотых долей. После сложения окончательную сумму округляем до десятых долей.

$$28,4 + 32,84 + 0,45 + 2,77 = 64,48 \approx 64,5.$$

1. При умножении и делении чисел необходимо их предварительно округлить, сохранив одну лишнюю значащую цифру по отношению к числу с наименьшим количеством значащих цифр. В окончательном результате сохраняется столько значащих цифр, сколько имеет приближенное число с наименьшим количеством значащих цифр.

Например, найти произведение чисел $1,4 \cdot 2,614 \cdot 7,1956$.

Предварительно округляем все числа до сотых долей. После перемножения произведения округляем до десятых:

$$1,4 \cdot 2,61 \cdot 7,20 = 26,309 \approx 26,3.$$

2. При возведении в квадрат или куб в окончательном результате нужно оставить столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.

Например, возвести в квадрат число 4,43. Получим $4,43^2 = 19,6249 \approx 19,62$.

3. При извлечении квадратного или кубического корня в окончательном результате следует взять столько значащих цифр, сколько их имеется в приближенном подкоренном числе.

Например, извлечем квадратный корень из числа $4,33 \cdot 10^{-6}$.

$$\text{Получим: } \sqrt{4,33 \cdot 10^{-6}} = 2,082 \cdot 10^{-3} = 2,08 \cdot 10^{-3}.$$

4. При вычислении сложных выражений необходимо пользоваться приведенными правилами (1–4) в соответствии с видом выполняемых операций. При этом во всех промежуточных результатах следует сохранять одну лишнюю цифру, которая затем в окончательном результате отбрасывается.

Например, найти числовое значение выражения:

$$\frac{(2,4 + 18,5082) \cdot \sqrt{2,43}}{1,43 \cdot 3,0287 \cdot 10^6}.$$

В выражении число 2,4 имеет наименьшее количество значащих цифр, поэтому все промежуточные результаты вычислений должны округляться до трех значащих цифр, окончательный же результат округляется до двух значащих цифр.

$$\text{Получим: } \frac{(2,4 + 18,5082) \cdot \sqrt{2,43}}{1,43 \cdot 3,0287 \cdot 10^6} = \frac{20,9 \cdot 1,56}{4,33 \cdot 10^6} = \frac{32,6}{4,33 \cdot 10^6} \approx 7,52 \cdot 10^{-6} \approx 7,5 \cdot 10^{-6}.$$

Определение погрешности опыта

Все величины, полученные из опыта, в общем случае содержат погрешности, обусловленные различными причинами. В зависимости от причин погрешности делятся на следующие группы:

– систематические инструментальные погрешности, вызываемые неисправностями измерительных приборов, неточностью градуировки шкал, неточностью измерения нагрузок, деформаций, размеров и т. д., которые могут быть устранены или достаточно точно учтены в виде поправок;

– случайные погрешности, зависящие от чувствительности измерительных приборов, внешних условий (температуры, влажности, давления и т. д.), которые устранить невозможно, но можно учесть, приняв закон их распределения;

– промахи или брак – это грубые погрешности, вызванные ошибками и упущениями при измерениях (неправильный отсчет по шкале или запись результата, неисправность оборудования и др.), которые при соответствующем обосновании должны отбрасываться (отсеиваться). Считается, что при тщательно поставленном исследовании систематические погрешности и промахи отсутствуют.

Таким образом, задача статистической обработки результатов испытаний сводится к оценке выборочного среднего и абсолютной ошибки измеряемой величины. Эта задача является стандартной для обработки результатов любых механических испытаний. Пусть при определении некоторой искомой величины N было проведено n независимых опытов и получен ряд значений $x_1, x_2 \dots x_n$. Совокупность n значений изучаемой величины называется статистической выборкой из генеральной совокупности. Обычно при механических испытаниях объем выборки колеблется от 3 до 25 измерений. Так как случайные ошибки измерений обычно подчиняются нормальному закону распределения, то наиболее вероятным значением измеренной величины будет выборочное среднее из полученных значений измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Чем больше случайная погрешность, тем больше рассеяние измеренных значений. Рассеяние результатов измерений характеризуется дисперсией – выборочным стандартным отклонением S , которое для выборки объемом n определяются формулой:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}. \quad (2)$$

Чем больше S , тем больше диапазон изменения случайной величины x_i в выборке $x_1, x_2 \dots x_n$. Тем более рассеяны значения измерений. Характеристикой сравнения однотипных величин служит относительная величина выборочного стандартного отклонения – коэффициент вариации:

$$v = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 \%. \quad (3)$$

Выборочное среднее также является случайной величиной, распределенной по нормальному закону, которое, согласно теории вероятностей, совпадает с генеральным средним измеряемой величины только при бесконечно большом количестве измерений. Поэтому для заданной выборки необходимо указывать доверительный интервал выборочного среднего \bar{x} для заданного уровня значимости или доверительной вероятности. Величина доверительного интервала определяется выборочным средним \bar{x} , стандартным отклонением S и критерием Стьюдента $t_{n-1, p}$ (псевдоним английского химика и математика В. С. Госсета), который зависит от выбранной доверительной вероятности p и числа степеней свободы f :

$$\bar{x} - \frac{t_{n-1,p}}{\sqrt{n}} \cdot S < M < \bar{x} + \frac{t_{n-1,p}}{\sqrt{n}} \cdot S, \quad (4)$$

где M – генеральное среднее исследуемой величины,

$$\Delta\bar{x} = \frac{t_{n-1,p}}{\sqrt{n}} \cdot S - \text{абсолютная средняя ошибка выборочного среднего } \bar{x}.$$

Значения t табулированы для различных уровней вероятности p и числа степеней свободы $f = n - 1$ (табл. 1). В практике механических испытаний, когда объем выборки не превышает $n < 25$, обычно уровни доверительной вероятности принимают равными: 0,8; 0,9; 0,95; 0,98; 0,99; рекомендуемая $p = 0,95$.

При однократном измерении или многократно повторяющихся одинаковых показаниях прибора величина абсолютной погрешности результата измерения оценивается приведенной относительной ошибкой прибора, определяемой его классом точности или наименьшим делением шкалы. Класс точности прибора указывает допустимую для него величину приведенной относительной ошибки:

$$k = \frac{\Delta N_{\text{пр}}}{N_{\text{пред}}} \cdot 100 \%, \quad (5)$$

где $\Delta N_{\text{пр}}$ и $N_{\text{пред}}$ – наименьшее деление и предел измерения прибора.

Если класс точности прибора (по паспорту или тарировке) известен, например $k = 1,5$, предел измерения шкалы $N_{\text{пред}} = 150$ мкм, то абсолютная погрешность:

$$\Delta N_{\text{пр}} = \frac{k \cdot N_{\text{пред}}}{100} = \frac{1,5 \cdot 150}{100} = 2,3 \text{ мкм}.$$

Критерии величины интервала выборочного среднего при доверительной вероятности $p = 0,95$

Критерий Стьюдента t при числе степеней свободы $f = n - 1$				Критерий Смирнова–Граббса τ при числе степеней свободы $f = n - 2$		
$f = n - 1$	$t_{n-1; 0,95}$	$t_{n-1; 0,95} / \sqrt{n}$	n	$f = n - 2$	$t_{n-2; 0,95}$	n
1	12,706	8,985	2	1	1,412	3
2	4,303	2,484	3	2	1,689	4
3	3,182	1,591	4	3	1,869	5
4	2,776	1,242	5	4	1,996	6
5	2,571	1,049	6	5	2,093	7
6	2,447	0,925	7	6	2,172	8
7	2,365	0,836	8	7	2,238	9
8	2,306	0,769	9	8	2,294	10
9	2,262	0,715	10	9	2,343	11
10	2,228	0,672	11	10	2,387	12
11	2,201	0,635	12	11	2,426	13
12	2,179	0,604	13	12	2,461	14
13	2,160	0,577	14	13	2,494	15
14	2,145	0,554	15	14	2,523	16
15	2,131	0,533	16	15	2,551	17
16	2,120	0,514	17	16	2,557	18
17	2,110	0,497	18	17	2,601	19
18	2,101	0,482	19	18	2,623	20
19	2,093	0,468	20	19	2,644	21
20	2,086	0,455	21	20	2,664	22
21	2,080	0,443	22	21	2,683	23
22	2,074	0,432	23	22	2,701	24
23	2,069	0,422	24	23	2,718	25
24	2,064	0,413	25	24	2,734	26

Когда класс точности прибора не указан, за величину его абсолютной погрешности принимается половина цены наименьшего деления шкалы. Если разность двух параллельных измерений одного признака не превышает ошибку прибора, то результат принимается окончательным.

Рекомендуется обработку измерений проводить в последовательности:

- определить выборочное среднее и отклонения частных значений;
- вычислить выборочное стандартное отклонение измеряемой величины и его относительную величину – коэффициент вариации;
- определить доверительный интервал выборочного среднего для заданного уровня доверительной вероятности;
- проверить наличие промахов.

Отсев промахов

При неоднократных измерениях какой-либо величины отдельные измерения могут значительно отличаться от остальных измерений. Такие измерения должны подвергаться тщательному анализу, дающему право их оставить или отсеять как брак. На практике можно пользоваться следующими простыми методами отсева грубых погрешностей измерений. При нормальном распределении случайной величины вероятность ошибки по абсолютной величине, превосходящей $3S$, составляет всего 0,003, т. е. такие ошибки встречаются в трех измерениях на тысячу. На этом основании при обработке результатов экспериментов, при малом объеме выборки $n \leq 25$, применяется правило трех сигм, а число $\Delta = 3S$ называется наибольшей возможной ошибкой, где S при однократном измерении или многократно повторяющихся одинаковых показаниях прибора величина абсолютной погрешности результата измерения оценивается приведенной относительной ошибкой прибора, определяемой его классом точности или наименьшим делением шкалы. Класс точности прибора указывает допустимую для него величину приведенной относительной ошибкой:

$$k = \frac{\Delta N_{\text{пр}}}{N_{\text{пред}}} \cdot 100 \%, \quad (6)$$

где $\Delta N_{\text{пр}}$ и $N_{\text{пред}}$ – наименьшее деление и предел измерения прибора.

Если класс точности прибора (по паспорту или тарировке) известен, например $k = 1,5$, предел измерения шкалы $N_{\text{пред}} = 150$ мкм, то абсолютная погрешность прибора будет:

$$\Delta N_{\text{пр}} = \frac{k \cdot N_{\text{пред}}}{100} = \frac{1,5 \cdot 150}{100} = 2,3 \text{ мкм.}$$

Когда класс точности прибора не указан, за величину его абсолютной погрешности принимается половина цены наименьшего деления шкалы. Если разность двух параллельных измерений одного признака не превышает ошибку прибора, то результат принимается окончательным.

Рекомендуется обработку измерений проводить в последовательности:

- определить выборочное среднее и отклонения эмпирических данных;
- вычислить выборочное стандартное отклонение измеряемой величины и его относительную величину – коэффициент вариации;

- определить доверительный интервал выборочного среднего для заданного уровня доверительной вероятности;
- проверить наличие промахов.

Считается, что если сомнительное измерение отклоняется от выборочного среднего, определенного по остальным измерениям больше, чем на $3S$, $|x_i - \bar{x}| \geq 3S$, то такое измерение необходимо или повторить, или отбросить, так как оно является грубой ошибкой – промахом.

Для несимметричных распределений брак определяется вычислением максимального относительного отклонения τ по критерию Смирнова–Граббса. Если оно больше допустимой величины $\tau_{n-2; 0,95}$, измерение является ошибочным:

$$\tau = \frac{|x_i - \bar{x}|}{S} \leq \tau_{n-2; 0,95}, \quad (7)$$

где x_i – сомнительное измерение;

\bar{x} и S – выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение, вычисленные по остальным измерениям;

τ – значения, принимаемые по табл. 1, в зависимости от числа степеней свободы $f = n - 2$ и доверительной вероятности $p = 0,95$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмин, Л. Ю. Сопротивление материалов: методические указания по выполнению виртуальных лабораторных работ на ПЭВМ / Л. Ю. Кузьмин, А. Л. Кузьмин. – Москва : РГОТУС, 2007. – 55 с.
2. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов: лабораторный практикум / учеб. пособие / М. Д. Подскребко, О. И. Мисуно, С. А. Легенький. – Минск : Амалфея, 2001. – 272 с.
3. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Минск : Высшая школа, 2007. – 797 с.: ил.